

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

LE POLYNÔME DE TUTTE ET SES APPLICATIONS EN THÉORIE DES
GRAPHES, EN MÉCANIQUE STATISTIQUE ET EN THÉORIE DES
NOEUDS

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

FRANÇOIS HOTTE

MARS 2006

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je remercie profondément ma p'tite Marie-ève, qui m'a accompagné tout au long de ma maîtrise. Les longues heures à travailler ensemble, autant dans les cours que pour nos mémoires, nous ont permis de parfaire une complicité déjà bien établie. Je la remercie de m'avoir aidé à garder le moral et à demeurer concentré sur mes objectifs.

Je remercie ma famille, qui pour moi constitue un grand réconfort. Tout d'abord, mes parents, qui m'ont toujours soutenu dans mes choix, qui par ailleurs n'ont pas toujours été faciles. Pour cela, je leur en suis très reconnaissant. Ils ont toujours été là pour moi, prêts à faire n'importe quel sacrifice pour que je puisse être bien, et pour ça, ce sont des parents formidables. Merci pour tout!

Je remercie ma soeur Marie-Josée et mon beau-frère Serge (mon "beautiful bro"), Xavier, Mariane, mon filleul Vincent et Gabrielle, qui sont pour moi une grande source de bonheur et d'inspiration. Le fait de prendre la route pour North Hatley constitue à coup sûr l'arrivée à une destination où la chaleur, le plaisir et l'affabilité sont au rendez-vous.

Je remercie mon ami Guillaume d'être à mes côtés depuis toujours, de m'avoir encouragé et qui, comme toujours, me donne de judicieux conseils. Merci d'avoir accepté de réviser ce travail.

Je remercie mes beaux-parents, qui ont mis au monde l'amour de ma vie, et qui, par leur générosité, sont toujours là pour nous.

Je remercie mon bel oncle Claude et ma belle tante Yolande, qui m'ont permis de me réfugier dans les contrées paisibles de Verchères, loin de la ville bruyante et agitée.

Évidemment, je remercie mon directeur, Pierre Leroux. La rigueur dont il fait preuve dans tout ce qu'il accomplit, de même que sa patience et un sens de l'humour sans égal ont fait de la rédaction de ce mémoire un moment apprécié.

Je remercie Gisèle Legault, qui avait toujours les réponses à mes tourments informatiques.

Je remercie tous les gens qui ont égayé mon séjour à l'UQAM. Tout d'abord, Francis, mon compagnon du baccalauréat. Nous sommes les *Denis Drolet* des mathématiques. Et je remercie, pour ne pas les nommer, Gabriel dit Gab, Daniel dit Disco Dan, Xavier dit Mister X., Karine, Philippe dit Phil, Anouk, Annie, Geneviève, Baptiste et Clément les inséparables, Sylvain, Jean-Baptiste dit JB, Anissa, et il est évident que j'en oublie.

Merci au LaCIM, au Fonds à l'accessibilité et à la réussite des études (FARE) de l'UQAM, ainsi qu'à mon directeur pour le soutien financier.

Merci!

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX	v
LISTE DES FIGURES	vii
RÉSUMÉ	ix
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I	
PRÉSENTATION DU POLYNÔME DE TUTTE	4
1.1 Quelques définitions préliminaires	4
1.2 Les V-Fonctions	14
1.2.1 La fonction de graphes $f_c(G; \underline{s})$	14
1.2.2 La fonction $Q(G; t, z)$	19
1.2.3 Différents théorèmes concernant la fonction $Q(G; t, z)$	22
1.3 Le polynôme de Tutte	25
CHAPITRE II	
LES SPÉCIALISATIONS DU POLYNÔME DE TUTTE	35
2.1 Le polynôme de Tutte et la théorie des graphes	35
2.1.1 Le polynôme chromatique	36
2.1.2 Le polynôme de flot	40
2.1.3 Le polynôme de fiabilité	49
2.2 Le polynôme de Tutte et la mécanique statistique	51
2.2.1 Le modèle de Potts	51
2.2.2 Le polynôme de Tutte et le modèle de Potts	54
CHAPITRE III	
LE POLYNÔME DE TUTTE ET LA THÉORIE DES NOEUDS	56
3.1 Introduction à la théorie des noeuds	56
3.2 Le polynôme de Jones	66
3.3 Le polynôme de Tutte et le polynôme de Jones	73
CHAPITRE IV	

CALCULS SUR LES GRAPHEs CONNEXES ET 2-CONNEXES	83
4.1 Équations fonctionnelles et fonctions de poids bloc-multiplicatives	83
4.1.1 Brève introduction à la théorie des espèces combinatoires	83
4.1.2 Les fonctions de poids bloc-multiplicatives	85
4.1.3 L'équation fonctionnelle $C'_B = E(B'(C_B^\bullet))$	88
4.2 Calculs sur les graphes 2-connexes	90
4.3 Calculs sur les graphes connexes	92
4.4 Les λ -flots sur les graphes 2-connexes à quatre sommets et les marches de longueur trois dans $\mathbb{N}^{\lambda-1}$	93
CONCLUSION	99
APPENDICE A	
RÉSULTATS POUR LES GRAPHEs 2-CONNEXES SUR n SOMMETS, $2 \leq$ $n \leq 6$	100
APPENDICE B	
TABLEAUX DES COEFFICIENTS $ B_a[n] _w$, $2 \leq n \leq 6$	122
APPENDICE C	
TABLEAUX DES COEFFICIENTS $ C_B[n] _w$, $1 \leq n \leq 6$	125
BIBLIOGRAPHIE	128

LISTE DES TABLEAUX

4.1	Tableau général des informations pour chaque classe de graphes 2-connexes	91
4.2	Valeurs de $ \mathcal{B}_a[4] _{N^*}(\lambda)$, $1 \leq \lambda \leq 10$	94
B.1	Les coefficients $ \mathcal{B}_a[n] _{\varepsilon}$ sont le nombre total de graphes 2-connexes étiquetés sur n sommets, $2 \leq n \leq 6$	122
B.2	Les coefficients $ \mathcal{B}_a[n] _{ac}$ sont le nombre total d'arbres couvrants sur les graphes 2-connexes étiquetés sur n sommets, $2 \leq n \leq 6$	122
B.3	Les coefficients $ \mathcal{B}_a[n] _{\chi}$ sont la somme des polynômes de Tutte de tous les graphes 2-connexes étiquetés sur n sommets, $2 \leq n \leq 6$	123
B.4	Les coefficients $ \mathcal{B}_a[n] _{N^*}$ sont le nombre total de λ -flots à flux non nuls sur tous les graphes 2-connexes étiquetés sur n sommets, $2 \leq n \leq 6$	123
B.5	Les coefficients $ \mathcal{B}_a[n] _{\mathcal{R}}$ sont la somme des polynômes de fiabilité de tous les graphes 2-connexes étiquetés sur n sommets, $2 \leq n \leq 6$	124
C.1	Les coefficients $ \mathcal{C}_{\mathcal{B}}[n] _{\varepsilon}$ sont le nombre total de graphes connexes étiquetés sur n sommets, $1 \leq n \leq 6$	125
C.2	Les coefficients $ \mathcal{C}_{\mathcal{B}}[n] _{ac}$ sont le nombre total d'arbres couvrants sur les graphes connexes étiquetés sur n sommets, $1 \leq n \leq 6$	126
C.3	Les coefficients $ \mathcal{C}_{\mathcal{B}}[n] _{\chi}$ sont la somme des polynômes de Tutte de tous les graphes connexes étiquetés sur n sommets, $1 \leq n \leq 6$	126

- C.4 Les coefficients $|C_{\mathcal{B}}[n]|_{\mathbb{N}^*}$ sont le nombre total de λ -flots à flux non nuls
sur tous les graphes connexes étiquetés sur n sommets, $1 \leq n \leq 6$ 127
- C.5 Les coefficients $|C_{\mathcal{B}}[n]|_{\mathbb{R}}$ sont la somme des polynômes de fiabilité de tous
les graphes connexes étiquetés sur n sommets, $1 \leq n \leq 6$ 127

LISTE DES FIGURES

1.1	Le multigraphe avec boucles g étiqueté aux sommets et aux arêtes . . .	5
1.2	Un sous-graphe couvrant du graphe g	6
1.3	Le graphe g dont l'arête b a été supprimée	7
1.4	Un graphe $G = (V, E, I)$ avec $E = S \cup T$, où S est représenté par les arêtes pleines et T est représenté par les arêtes pointillées	8
1.5	Le graphe G_S'' issu de G par la contraction de S	9
1.6	Le graphe g	10
1.7	La contraction dans g de l'arête (i) a , (ii) g et (iii) i	10
1.8	Le graphe $Cy(3)$ étiqueté arbitrairement	33
1.9	(i) Un arbre couvrant T du graphe $Cy(3)$ (ii) Les deux composantes de T_1	33
3.1	(i) Un lien et (ii) une boucle marqués d'un croisement	58
3.2	Le graphe C_2	59
3.3	Application à C_2 de la construction de la définition 120	59
3.4	Le graphe g_1	60
3.5	Pour obtenir $U(g_1)$ à partir de g_1	60
3.6	Pour obtenir $g(U(g_1))$ à partir de $U(g_1)$	62
3.7	(i) Univers du trèfle (ii) Un univers ponts et chaussées du trèfle	64

3.8	Les trois types de mouvement de Reidemeister	64
3.9	Bijection entre les croisements et les arêtes signées	65
3.10	La somme connexe du noeud de trèfle gauche Trg avec lui-même	67
3.11	La valeur attribuée à chaque type de croisement	69
3.12	Le diagramme Trg du trèfle gauche	70
3.13	Le diagramme Trg° du trèfle gauche orienté	72
3.14	Équivalences locales entre graphe et entrelacs	76
3.15	(i) Diagramme Trg bicolore (ii) Graphe médian $g(\text{Trg})$	81
4.1	(i) Un graphe connexe g (ii) Le graphe-bloc de g (iii) Le bc -arbre $bc(g)$	86
4.2	L'équation fonctionnelle $C'_B = E(B'(C_B^\bullet))$	89
4.3	Les marches de longueur 3 dans \mathbb{N}^3	95

RÉSUMÉ

L'objectif visé dans ce travail consiste en la présentation du polynôme de Tutte, et ce à la manière de son idéateur, M. William Thomas Tutte. Nous dressons également un portrait de l'éventail des applications possibles de ce polynôme, notamment en théorie des graphes, en physique de la mécanique statistique, de même qu'en théorie des noeuds. À cet égard, nous faisons la démonstration que le polynôme de Tutte admet une spécialisation en terme de la fonction de partition d'un modèle de Potts, ainsi qu'en terme du polynôme de Jones d'un entrelacs alterné.

Ce travail se conclut par une série de calculs sur les graphes 2-connexes et connexes, pour lesquels nous utilisons une équation fonctionnelle bien connue de la théorie des espèces, de même que des fonctions de poids bloc-multiplicatives.

Ces calculs nous ont permis, entre autres, d'établir l'égalité entre le poids total des λ -flots à flux non nuls sur les graphes 2-connexes à quatre sommets et le nombre de marches de longueur trois dans l'hypercube de dimension $\lambda - 1$.

Mots clés: Polynôme de Tutte, polynôme chromatique, polynôme de flot, polynôme de fiabilité, polynôme de Jones, entrelacs alterné, fonction de partition, modèle de Potts, graphes 2-connexes.

INTRODUCTION

William Thomas Tutte est né en Angleterre, dans le comté de Suffolk dans la ville de Newmarket. Il est le fils de M. William John Tutte, un jardinier, et de Mme Annie Newell, une cuisinière. À cette époque, ses deux parents travaillaient pour la maison Fitzroy, un endroit à Newmarket où l'on élevait des chevaux de course.

Même si William Tutte a connu du succès auprès de la communauté mathématique internationale, ce n'est pas aux mathématiques que le jeune Tutte s'intéresse d'abord, mais c'est plutôt à la chimie. Ce n'est qu'au niveau du doctorat qu'il a finalement opté pour les mathématiques, après avoir contribué à la victoire des Alliés pendant la Deuxième Guerre mondiale. Un héros de guerre que ce M.Tutte...

Alors qu'il était chercheur en chimie à Cambridge et que la Deuxième Guerre mondiale débutait, son directeur de recherche remarqua les talents mathématiques de son jeune chercheur et décida de le recommander à Bletchley Park, un endroit où l'on décryptait des messages de guerre codés en provenance de l'ennemi. C'est ainsi qu'en janvier 1941, il se retrouve en poste à Bletchley Park.

Son effort de guerre fut considérable. Il a réussi à décrypter un message de guerre de nature FISH, un type d'encryptage utilisé par les allemands pour communiquer des informations stratégiques. Le premier message de ce type intercepté par Bletchley Park fut disponible en 1941, alors que les Allemands tentaient d'envoyer une communication à Athènes concernant la prise de la ville de Vienne en Autriche. Le 30 août 1941, un officier de radio allemand commet une erreur en envoyant deux fois le même message, dont le deuxième comprend des modifications visant à corriger la ponctuation du premier message. En analysant ces deux messages, Tutte fut capable de déduire la structure de la machine qui envoyait les messages, et ce après quatre mois d'intense travail.

En examinant la logique dans les caractères utilisés dans le message, Tutte a déduit que cette machine comportait une roue de 41 dents, et une seconde roue de 31 dents. En jumelant son travail avec celui de ses collègues de Bletchley Park, il a découvert que cette machine comportait 12 roues et il a compris de quelle manière ces roues étaient reliées ensemble.

Après avoir bien compris le fonctionnement de la machine qui envoyait les messages allemands, Tutte a conçu un algorithme permettant de décrire les messages à venir. En 1943, l'algorithme était devenu trop complexe pour être effectué à la main, de sorte qu'on construisit un ordinateur, nommé Colossus, pour effectuer l'algorithme de Tutte décrivant les messages FISH. L'algorithme de Tutte et l'ordinateur Colossus jouèrent un rôle important jusqu'à la fin de la guerre.

Après avoir servi son pays à Bletchley Park, Tutte compléta un doctorat en mathématiques en 1948. À cette occasion, Donald Coxeter, un mathématicien émérite canadien bien connu pour les groupes qui portent son nom, l'invita à poursuivre son post-doctorat à l'Université de Toronto. Ce qu'il fit. Par la suite, William Tutte publia de nombreux articles et livres et devint un pilier de la théorie des graphes et des matroïdes. Il exerça sa profession à l'Université de Waterloo, au Canada, où il contribua grandement à l'essor de la faculté en fondant le département de combinatoire et d'optimisation.

On dit de lui qu'il était quelqu'un de timide possédant un caractère placide, conservant son calme en toute circonstance, toujours serein. Il est décédé à Waterloo au Canada, le 2 mai 2002.

Le polynôme que nous a laissé M. Tutte est intéressant puisqu'il est très riche en informations à propos d'un graphe. À cet égard, le polynôme de Tutte constitue, notamment, une généralisation des polynômes chromatique, de flot et de fiabilité. Il est également possible de le généraliser pour le définir dans le contexte des matroïdes, qui constituent une généralisation des ensembles indépendants.

En physique de la mécanique statistique, le polynôme de Tutte joue un rôle dans le modèle de Potts, alors qu'il peut se spécialiser en une fonction, dite de partition, qui est centrale dans ce domaine. Le modèle de Potts concerne la théorie des phénomènes critiques, par exemple les transitions de phases.

En théorie des noeuds, le polynôme de Tutte se manifeste sous la forme d'un invariant de noeuds, notion centrale dans cette théorie. L'une des questions fondamentales en théorie des noeuds consiste à pouvoir déterminer si deux noeuds appartiennent ou non à la même classe isotopique de noeuds. Pour ce faire, on a développé une série d'instruments, appelés invariants de noeud, où l'invariant en question constitue une caractéristique distincte d'une classe de noeuds. Le polynôme de Tutte se spécialise, pour un type de noeud spécifique, en le polynôme de Jones, un invariant de noeud bien connu développé par Vaughan F.R. Jones dans les années 1980.

Il est probable que d'autres liens puissent être établis entre le polynôme de Tutte et d'autres domaines des mathématiques ou des sciences en général, puisque la notion de graphe est fondamentale dans de nombreux contextes, notamment en biologie et en chimie.

CHAPITRE I

PRÉSENTATION DU POLYNÔME DE TUTTE

1.1 Quelques définitions préliminaires

Cette section vise à introduire l'ensemble des concepts de base de la théorie des graphes qui seront nécessaires tout au long de ce travail. Plus particulièrement, les notions de suppression et de contraction d'arêtes et de nombre cyclomatique serviront dans la définition et l'utilisation du polynôme de Tutte.

Définition 1 Un *multigraphe avec boucles* G est un triplet $(V, E, I) = (V(G), E(G), I)$ défini comme suit:

- (i) $V :=$ Ensemble fini des *sommets* du graphe G
- (ii) $E :=$ Ensemble fini des *arêtes* du graphe G
- (iii) $I : E \longrightarrow \mathcal{P}_1(V) \cup \mathcal{P}_2(V)$ est appelée la fonction d'incidence, où $\mathcal{P}_k(V)$ désigne l'ensemble des parties de V ayant k éléments, c'est-à-dire

$$\mathcal{P}_k(V) = \{U \mid U \subseteq V \text{ et } |U| = k\}.$$

Les arêtes $e \in E$ telles que $I(e) \in \mathcal{P}_1(V)$ sont appelées des *boucles* (ou *singletons*) et les arêtes $e \in E$ telles que $I(e) \in \mathcal{P}_2(V)$ sont appelées des *liens* (ou *paires*).

Lorsque les ensembles V et E sont vides, on obtient le *graphe vide* (ou le *graphe nul*) et on le note 0 . On dit d'un sommet $v \in V$ qu'il est *incident* à une arête $e \in E$

si $v \in I(e)$. On dénote par $p_0(G)$ le nombre de *composantes connexes* de G . On dit d'un graphe qu'il est *connexe* s'il possède une seule composante connexe.

Exemple 2 Soit $\mathfrak{g} = (V, E, I)$ le graphe tel que

$$V = \{1, 2, 3, 4\},$$

$$E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}.$$

Supposons que la fonction d'incidence I soit définie par $I(a) = \{1, 4\}$, $I(b) = \{1, 2\}$, $I(c) = \{2, 3\}$, $I(d) = \{3, 4\}$, $I(e) = \{4\}$, $I(f) = I(g) = I(h) = \{1, 3\}$, $I(i) = I(j) = I(k) = \{2\}$. Le multigraphe avec boucles \mathfrak{g} est représenté à la figure 1.1. On remarque que les sommets et les arêtes sont étiquetés.

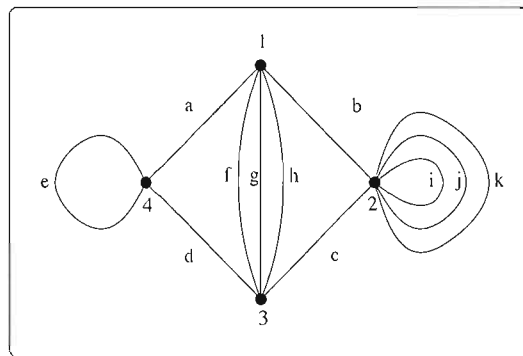


Figure 1.1 Le multigraphe avec boucles \mathfrak{g} étiqueté aux sommets et aux arêtes

Dans le but d'alléger la notation, le terme graphe sera utilisé pour signifier un multigraphe avec boucles, à moins d'avis contraire.

Définition 3 Soit $G = (V, E, I)$ et $H = (W, F, J)$ deux graphes. On dit que G et H sont *disjoints* s'ils ne partagent aucun sommet ni aucune arête, c'est-à-dire si $V \cap W = \emptyset$ et $E \cap F = \emptyset$.

Définition 4 On dit qu'un graphe G est la *somme* de deux graphes H et K , et on écrit $G = H + K$, si $V(G)$ est l'union disjointe de $V(H)$ et $V(K)$, et $E(G)$ est l'union disjointe de $E(H)$ et $E(K)$.

Définition 5 Soit $G = (V, E, I)$ un graphe. On dit que $H = (W, F, J)$ est un *sous-graphe* de G si $W \subseteq V$, $F \subseteq E$ et $J = I|_F$. On écrit alors $H \subseteq G$.

Définition 6 Soit $G = (V, E, I)$ un graphe et soient $H = (V_1, E_1, I|_{E_1}) \subseteq G$ et $K = (V_2, E_2, I|_{E_2}) \subseteq G$ deux sous-graphes de G . L'*union* de H et K , notée $H \cup K$, est un sous-graphe de G , où

$$\begin{aligned} V(H \cup K) &= V_1 \cup V_2, \\ E(H \cup K) &= E_1 \cup E_2. \end{aligned}$$

L'*intersection* de H et K , notée $H \cap K$, est également un sous-graphe de G , où

$$\begin{aligned} V(H \cap K) &= V_1 \cap V_2, \\ E(H \cap K) &= E_1 \cap E_2. \end{aligned}$$

Définition 7 Soit $G = (V, E, I)$ un graphe. On dit que $H = (W, F, J)$ est un *sous-graphe couvrant* de G si H est un sous-graphe de G et qu'en plus $V = W$. On note H par $G|_F$ pour signifier la restriction de G au sous-ensemble d'arêtes $F \subseteq E$.

Exemple 8 Le graphe défini par le triplet $\{V, \{c, e, f, g, j\}, I\}$ représente un sous-graphe couvrant du graphe \mathfrak{g} de l'exemple 2. Il est représenté à la figure 1.2.

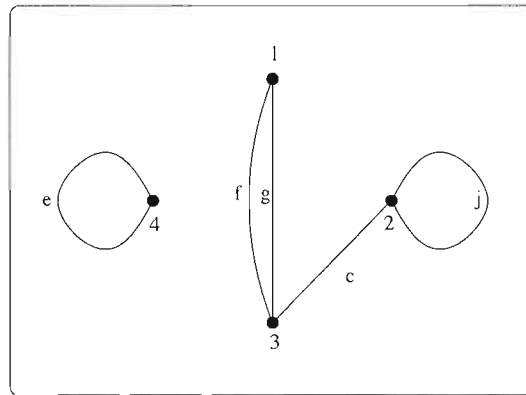


Figure 1.2 Un sous-graphe couvrant du graphe \mathfrak{g}

Définition 9 Soient $G = (V, E, I)$ et $H = (W, F, J)$ deux graphes. On dit que les graphes G et H sont *isomorphes* s'il existe une paire ordonnée de fonctions bijectives $\theta = (f, g)$, $f : V \xrightarrow{\sim} W$ et $g : E \xrightarrow{\sim} F$, qui satisfont la condition suivante: Le sommet $x \in V$ est incident à l'arête $a \in E$ si et seulement si le sommet $f(x) \in W$ est incident à l'arête $g(a) \in F$. Cela se résume par le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{I} & \mathcal{P}_1(V) \cup \mathcal{P}_2(V) \\ g \downarrow & & \downarrow \mathcal{P}_1(f) \cup \mathcal{P}_2(f) \\ F & \xrightarrow{J} & \mathcal{P}_1(W) \cup \mathcal{P}_2(W) \end{array}$$

On écrit alors $G \simeq H$.

Définition 10 Soit $G = (V, E, I)$ un graphe. Faire la *suppression d'une arête* $a \in E$ consiste à considérer le sous-graphe couvrant $H = (W, F, I) \subseteq G$ défini par

$$\begin{aligned} W &= V \\ F &= E - \{a\} \end{aligned} \tag{1.1}$$

On note G'_a le sous-graphe couvrant résultant.

La figure 1.3 montre l'exemple du graphe g dont l'arête b a été supprimée.

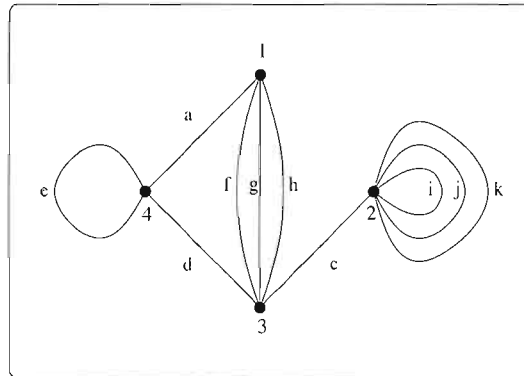


Figure 1.3 Le graphe g dont l'arête b a été supprimée

Définition 11 Soit $G = (V, E, I)$ un graphe, et soit S et T deux sous-ensembles complémentaires de E , c'est-à-dire que $\{S, T\}$ forme une partition de E . Considérons le

sous-graphe couvrant $G|_S = (V, S)$ de G . On définit le graphe $G''_S = (W, F, J)$ obtenu par la *contraction de l'ensemble S* de la façon suivante:

$W :=$ Ensemble des *composantes connexes* de $G|_S$.

$F :=$ Le *sous-ensemble T* avec les particularités suivantes:

- (i) Si une arête $t \in T$ dans G joint deux sommets qui font partie de la même composante connexe de $G|_S$, alors elle est une boucle dans le graphe G''_S , ayant pour sommet d'incidence cette composante connexe.
- (ii) Si une arête $t \in T$ dans G joint deux sommets qui ne font pas partie de la même composante connexe de $G|_S$, alors elle est une arête dans le graphe G''_S qui joint ces deux composantes connexes.

Les figures 1.4 et 1.5 illustrent la contraction d'un sous-ensemble d'arêtes.

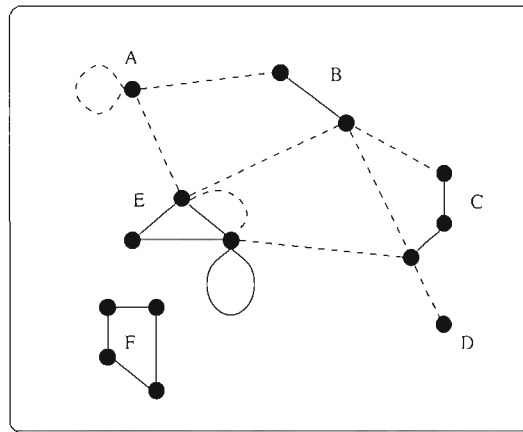


Figure 1.4 Un graphe $G = (V, E, I)$ avec $E = S \cup T$, où S est représenté par les arêtes pleines et T est représenté par les arêtes pointillées

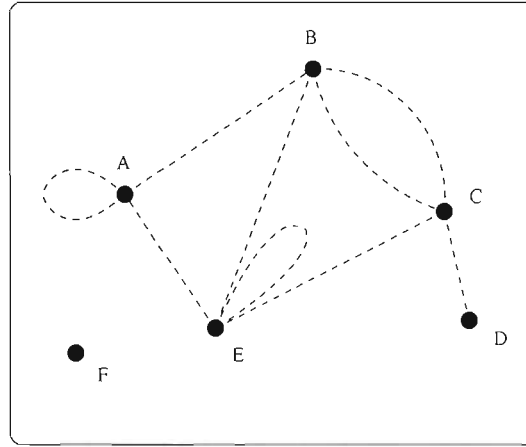


Figure 1.5 Le graphe G_S'' issu de G par la contraction de S

Proposition 12 Soit $G = (V, E, I)$ un graphe et soit S un sous-ensemble de E . Alors

$$p_0(G_S'') = p_0(G) \quad (1.2)$$

Preuve Voir la preuve dans le livre de Tutte (1984) à la page 35. ■

Ce qui nous intéresse davantage dans ce travail, c'est le cas particulier de la contraction de S lorsqu'il est réduit à une seule arête. C'est ce qu'on appelle faire la contraction d'une arête.

Définition 13 Soit $G = (V, E, I)$ un graphe. Faire la *contraction d'une arête* $a \in E$ consiste à restreindre, dans la définition 11, l'ensemble S à l'unique arête $\{a\}$. Dans ce cas, nous avons

$$\begin{aligned} S &= \{a\} \\ T &= E - \{a\} \end{aligned} \quad (1.3)$$

On note G_a'' le graphe résultant.

Corollaire 14 Soit $G = (V, E, I)$ un graphe et soit $a \in E$ une arête de G (soit une boucle ou un lien). Alors

$$p_0(G''_a) = p_0(G). \quad (1.4)$$

Preuve C'est une conséquence directe de la proposition 12. ■

Voici un exemple qui illustre la contraction d'une arête.

Exemple 15 Reprenons le graphe g de l'exemple 2, tel qu'illustré à la figure 1.6.

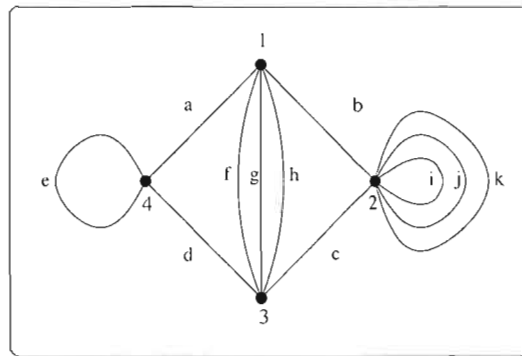


Figure 1.6 Le graphe g

La figure 1.7 illustre différents choix d'arêtes pour la contraction de g .

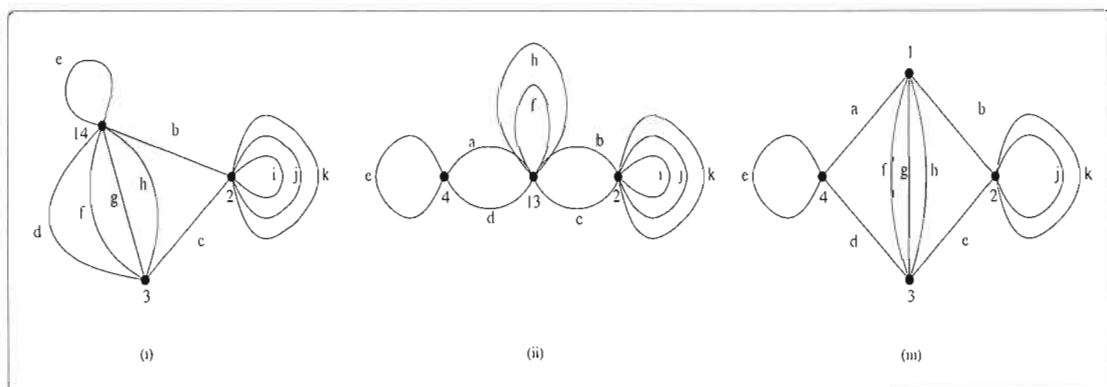


Figure 1.7 La contraction dans g de l'arête (i) a , (ii) g et (iii) i .

Il est à noter que lorsque l'on contracte un lien, les deux sommets incidents au lien forment ensuite un seul sommet. On peut l'étiqueter arbitrairement, ou on peut le noter par les deux étiquettes d'origine collées ensemble. C'est le cas aux figures 1.7 (i) et (ii), où le sommet résultant de la contraction d'un lien est étiqueté respectivement 14 et 13. À la figure 1.7 (iii), on contracte une boucle de sorte que l'étiquette du sommet incident à cette boucle est inchangée.

On remarque en particulier que si a est une boucle, alors $G'_a = G''_a$.

Nous introduisons maintenant le concept de nombre cyclomatique d'un graphe. Ce concept est fondamental puisqu'il intervient directement dans la définition du polynôme de Tutte.

Définition 16 Soit $G = (V, E, I)$ un graphe. Le *nombre cyclomatique* $p_1(G)$ de G est défini comme étant

$$p_1(G) = |E| - |V| + p_0(G) \quad (1.5)$$

Par exemple, le graphe g de la figure 1.1 a un nombre cyclomatique égal à 8, c'est-à-dire que $p_1(G) = 11$ arêtes - 4 sommets + 1 composante connexe.

Afin de mieux comprendre la notion de nombre cyclomatique, nous introduisons la notion d'espace vectoriel de cycles.

Définition 17 Soit $G = (V, E, I)$ un multigraphe avec boucles. Une *orientation* D de G est une fonction $D : E \longrightarrow V \times V$ compatible avec la fonction d'incidence I , c'est-à-dire telle que le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{D} & V \times V \\ I \searrow & & \downarrow q \\ & & \mathcal{P}_1(V) \cup \mathcal{P}_2(V) \end{array}$$

où la fonction q est définie naturellement par

$$q((x, y)) = \begin{cases} \{x\} & \text{si } y = x, \\ \{x, y\} & \text{si } y \neq x. \end{cases}$$

Si $D(e) = (x, y)$, on dit que x est la *source* de l'arc e et que y est le *but* de l'arc e . De plus, on note $\alpha(e) = x$ et $\beta(e) = y$. La condition de compatibilité signifie simplement que la source et le but de tout arc sont justement les sommets incidents à e .

Remarque 18 La donnée des fonctions $\alpha, \beta : E \longrightarrow V$ caractérise parfaitement le couple (G, D) et on parle alors de *multigraphe orienté* pour désigner cette situation.

Définition 19 Un *multigraphe orienté* est un quadruplet (V, E, α, β) , où α et β sont des fonctions $E \longrightarrow V$. Les éléments de E sont désormais appelés des *arcs*. On appelle également *carquois* ce quadruplet.

Définition 20 Soit $G = (V, E, \alpha, \beta)$ un multigraphe orienté. Un *chemin de longueur k* dans G est une suite d'arcs (e_1, e_2, \dots, e_k) consécutifs de G , c'est-à-dire tels que $\beta(e_i) = \alpha(e_{i+1})$, pour $i = 1, 2, \dots, k-1$. On dit que $\alpha(e_1)$ est la *source du chemin* et $\beta(e_k)$ est le *but du chemin*.

Définition 21 Soit $G = (V, E, \alpha, \beta)$ un multigraphe orienté. Un *circuit en $x \in V$, de longueur k* , est un chemin de longueur k de source x et de but x .

Définition 22 Un *cycle* d'un multigraphe orienté G est un circuit du graphe $G \cup G^{\text{opp}}$, où G^{opp} est le graphe obtenu en renversant l'orientation de chaque arc de G .

La définition 22 indique que dans un cycle, on peut parcourir les arcs d'un graphe dans le sens de leur orientation ou dans le sens inverse.

Définition 23 Soit $G = (V, E, \alpha, \beta)$ un multigraphe orienté, avec $|E| = m > 0$. Posons $E = \{1, 2, \dots, m\}$. À chaque cycle c de G , on associe un vecteur $v(c) = (v_1, v_2, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^m$ défini selon la règle suivante: pour $i = 1, 2, \dots, m$, $v_i = p_i - n_i$, où p_i = nombre d'occurrences positives de l'arc i dans le cycle c et n_i = nombre d'occurrences négatives de l'arc i dans le cycle c . Ici, une occurrence est positive (resp. négative) si l'arc dans le cycle est parcouru dans le sens de son orientation (resp. le sens inverse de son orientation).

Définition 24 Soit $G = (V, E, \alpha, \beta)$ un multigraphe orienté, où $E = \{1, 2, \dots, m\}$. L'espace vectoriel des cycles de G , noté $\text{Cyc}(G)$, est le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^m engendré par les vecteurs de cycles de G . En d'autres termes,

$$\text{Cyc}(G) = W(\{v(c) \mid c \text{ cycle de } G\}), \quad (1.6)$$

où W représente le sous-espace engendré.

Remarque 25 Pour tout graphe G , le nombre cyclomatique de G est égal à la dimension de l'espace vectoriel $\text{Cyc}(G)$ des cycles de G , à savoir

$$p_1(G) = \dim \text{Cyc}(G). \quad (1.7)$$

La preuve de ce résultat se fait par récurrence sur le nombre d'arcs du graphe G . Pour plus de détails, voir dans le livre de Berge et Gouila-Houri (1962).

Remarque 26 Pour tout graphe G , $p_1(G) \geq 0$. Ce résultat est une conséquence directe de la remarque précédente. On peut aussi le voir par récurrence sur le nombre d'arêtes de G , comme on le constate dans la preuve de la proposition 41 (ii).

Voici l'énoncé d'une proposition concernant le nombre cyclomatique d'un graphe qui s'avérera utile plus loin dans ce travail.

Proposition 27 *Le nombre cyclomatique d'un graphe est égal à la somme des nombres cyclomatiques de ses composantes connexes.*

Preuve Soit un graphe $G = (V, E, I)$ possédant m composantes connexes, notons-les G_1, G_2, \dots, G_m , où $G_j = (V_j, E_j, I|_{E_j})$ pour tout j . Nous avons donc, $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$,

$$p_1(G_j) = |E_j| - |V_j| + 1,$$

ce qui entraîne

$$\sum_{j=1}^m p_1(G_j) = |E| - |V| + m = p_1(G).$$

Nous obtenons bien le résultat souhaité. ■

Proposition 28 Soit $G = (V, E, I)$ un graphe et soit $a \in E$ une arête de G .

(i) Si a est une boucle, alors

$$p_1(G''_a) = p_1(G) - 1. \quad (1.8)$$

(ii) Si a est un lien, alors

$$p_1(G''_a) = p_1(G). \quad (1.9)$$

Preuve

(i) Supposons que $a \in E$ soit une boucle. Dans ce cas, $|E| = |E(G''_a)| + 1$ et $|V| = |V(G''_a)|$. De plus, on a $p_0(G''_a) = p_0(G)$ par (1.4). On a donc

$$\begin{aligned} p_1(G) &= \left(|E(G''_a)| + 1\right) - |V(G''_a)| + p_0(G''_a) \\ &= p_1(G''_a) + 1. \end{aligned}$$

(ii) Supposons que $a \in E$ soit un lien. Dans ce cas, $|E| = |E(G''_a)| + 1$ et $|V| = |V(G''_a)| + 1$. De plus, on a $p_0(G''_a) = p_0(G)$ par (1.4), de sorte que

$$\begin{aligned} p_1(G) &= |E(G)| - |V(G)| + p_0(G) \\ &= \left(|E(G''_a)| + 1\right) - \left(|V(G''_a)| + 1\right) + p_0(G''_a) \\ &= p_1(G''_a). \end{aligned}$$

■

1.2 Les V-Fonctions

1.2.1 La fonction de graphes $f_c(G; \underline{s})$

Dans cette section, nous allons introduire le concept de V-fonction, de même que les fonctions f_c et Q , qui nous permettront de définir le polynôme de Tutte.

Définition 29 On dit d'une fonction f qu'elle est une *fonction de graphes* si f est définie sur les graphes et si pour deux graphes isomorphes G et H , $f(G) = f(H)$.

Définition 30 On dit d'une fonction de graphes f qu'elle est une *V-fonction* si elle satisfait les trois conditions suivantes:

(i) Si $G = 0$ est le graphe nul, alors

$$f(G) = 1. \quad (1.10)$$

(ii) Si un graphe $G = H + K$ est la somme (disjointe) de deux graphes H et K , alors

$$f(G) = f(H) \cdot f(K). \quad (1.11a)$$

(iii) Si G est un graphe et si a est un lien de G (c'est-à-dire une arête qui n'est pas une boucle), alors

$$f(G) = f(G'_a) + f(G''_a). \quad (1.12)$$

On remarque que les conditions (i) et (ii) sont cohérentes entre elles, puisqu'il est toujours possible de considérer un graphe comme étant la somme de lui-même et du graphe nul.

Un résultat important à propos des V-fonctions est le fait qu'elles peuvent être déterminées de façon unique si l'on connaît les valeurs qu'elles prennent sur des graphes bien choisis.

Proposition 31 *Toute V-fonction f est uniquement déterminée par ses valeurs prises sur les graphes constitués d'un unique sommet et d'un bouquet de boucles.*

Preuve La preuve se fait par induction sur le nombre de liens, c'est-à-dire les arêtes qui ne sont pas des boucles.

Soit G un graphe et soit $l(G)$ le nombre de liens de G (l pour *link* en anglais ou lien en français). Si $l(G) = 0$, alors G est formé uniquement de sommets possédant

chacun un nombre positif (possiblement nul) de boucles. Notons par H_i les composantes connexes de G . Par l'application répétée de (1.11a), on obtient

$$f(G) = \prod_i f(H_i).$$

Dans ce cas, $f(G)$ est entièrement déterminée par la valeur de f sur les sous-graphes H_i .

Supposons maintenant que $l(G) = m > 0$. On choisit un lien a de G et on obtient, par (1.12),

$$f(G) = f(G'_a) + f(G''_a),$$

avec $l(G'_a) = m - 1$ et $l(G''_a) \leq m - 1$. Par hypothèse d'induction, $f(G'_a)$ et $f(G''_a)$ sont uniquement déterminées, donc $f(G)$ l'est également. ■

Introduisons maintenant une famille $\underline{s} = \{s_0, s_1, s_2, \dots\}$ de variables formelles.

Définition 32 Pour tout graphe G , on définit le *poids* $w_c(G)$ par

$$w_c(G) = \prod_{m \geq 0} s_m^{i_m} = \underline{s}^i, \quad (1.13)$$

où pour $m \geq 0$, i_m est le nombre de composantes connexes de G de nombre cyclomatique m .

Comme tous les graphes G possèdent un nombre fini de composantes connexes, $w_c(G)$ est un monôme (produit fini) qui décrit, en fait, la distribution des nombres cyclomatiques des composantes connexes de G . La proposition qui suit concerne l'évaluation de la fonction de poids w_c sur le graphe nul et sur la somme de deux graphes.

Proposition 33 Soit G un graphe et soit $w_c(G)$ la fonction de poids définie par (1.13).

1. Si $G = 0$ est le graphe nul, alors

$$w_c(0) = 1. \quad (1.14)$$

2. Si $G + H$ est la somme (disjointe) des graphes G et H , alors

$$w_c(G + H) = w_c(G) \cdot w_c(H). \quad (1.15)$$

Preuve

1. Soit $G = 0$ le graphe nul. Alors $w_c(0) = \prod_{m \geq 0} s_m^{i_m} = \underline{s}^{\underline{i}}$ avec $\underline{i} = (0, 0, 0, \dots) = \underline{0}$.
Donc $w_c(0) = \underline{s}^{\underline{0}} = 1$.

2. Puisque $G + H$ est la somme disjointe des graphes G et H , on voit que $\forall m \geq 0$,

$$i_m(G + H) = i_m(G) + i_m(H).$$

De cette façon, on a

$$\begin{aligned} w_c(G + H) &= \prod_{m \geq 0} s_m^{i_m(G+H)} \\ &= \prod_{m \geq 0} s_m^{i_m(G)} \prod_{m \geq 0} s_m^{i_m(H)} \\ &= w_c(G) \cdot w_c(H). \end{aligned}$$

■

Considérons un graphe $G = (V, E, I)$ et notons par $\mathcal{S}(G)$ l'ensemble des sous-graphes couvrants de G . On remarque que $\mathcal{S}(G) = \mathcal{P}(E)$, où $\mathcal{P}(X)$ désigne l'ensemble des parties de X . Pour tout graphe G , on désigne par $|\mathcal{S}(G)|_{w_c}$ le poids total (pour w_c) de l'ensemble des sous-graphes couvrants de G , c'est-à-dire que

$$|\mathcal{S}(G)|_{w_c} = \sum_{H \in \mathcal{S}(G)} w_c(H). \quad (1.16)$$

Maintenant, nous introduisons deux lemmes à propos de l'ensemble $\mathcal{S}(G)$.

Lemme 34 *Soit G et H deux graphes disjoints. Alors*

$$|\mathcal{S}(G + H)|_{w_c} = |\mathcal{S}(G)|_{w_c} \cdot |\mathcal{S}(H)|_{w_c} \quad (1.17)$$

Preuve Considérons l'ensemble $\mathcal{S}(G + H)$ des sous-graphes couvrants de $G + H$. Alors il existe un isomorphisme d'ensembles pondérés $\mathcal{S}(G + H) \simeq \mathcal{S}(G) \times \mathcal{S}(H)$, où le \times désigne le produit cartésien d'ensembles. En effet, pour tout sous-graphe couvrant $K \subseteq (G + H)$, on associe bijectivement un couple de sous-graphes couvrants (K_G, K_H) définis par $K_G = K \cap G$ et $K_H = K \cap H$. On remarque que $K = K_G + K_H$ de sorte que par (1.15), $w_c(K) = w_c(K_G) \cdot w_c(K_H)$. On a donc

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}(G + H)|_{w_c} &= |\mathcal{S}(G) \times \mathcal{S}(H)|_{w_c \cdot w_c} \\ &= |\mathcal{S}(G)|_{w_c} \cdot |\mathcal{S}(H)|_{w_c}. \end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient directement à partir des propriétés des ensembles pondérés. ■

Lemme 35 *Soit G un graphe et soit a un lien de G . Alors il existe un isomorphisme d'ensembles pondérés qui préserve la fonction de poids w_c tel que*

$$\mathcal{S}(G) \simeq \mathcal{S}(G'_a) + \mathcal{S}(G''_a), \quad (1.18)$$

où le $+$ désigne l'union disjointe d'ensembles pondérés.

Preuve Considérons $\mathcal{S}_{inc}(G)$ l'ensemble des sous-graphes couvrants de G qui incluent le lien a , et $\mathcal{S}_{ninc}(G)$ l'ensemble des sous-graphes couvrants de G qui n'incluent pas le lien a . De façon naturelle, on a

$$\mathcal{S}(G) \simeq \mathcal{S}_{inc}(G) + \mathcal{S}_{ninc}(G).$$

Tout d'abord, $\mathcal{S}_{ninc}(G) = \mathcal{S}(G'_a)$. Ensuite, $\mathcal{S}_{inc}(G) \cong \mathcal{S}(G''_a)$. En effet, $\forall H \in \mathcal{S}_{inc}(G)$, on lui associe $H''_a \in \mathcal{S}(G''_a)$. Comme $p_1(G) = p_1(G''_a)$ par (1.9), nous obtenons bien le résultat souhaité. ■

Les propriétés des ensembles pondérés nous permettent d'observer que

$$|\mathcal{S}(G)|_{w_c} = \left| \mathcal{S}(G'_a) \right|_{w_c} + \left| \mathcal{S}(G''_a) \right|_{w_c}. \quad (1.19)$$

Voici maintenant la définition d'une fonction spéciale qui est centrale pour la compréhension du polynôme de Tutte.

Définition 36 La fonction $f_c = f_c(G; \underline{s})$ est définie par

$$f_c(G; \underline{s}) = |S(G)|_{w_c}, \quad (1.20)$$

où $|S(G)|_{w_c} = \sum_{H \in S(G)} w_c(H)$ désigne le poids total (pour w_c) de l'ensemble des sous-graphes couvrants de G .

En développant l'expression de f_c , on obtient

$$f_c(G; \underline{s}) = \sum_{\underline{i}=(i_0, i_1, i_2, \dots)} \mathcal{R}(G; \underline{i}) \underline{s}^{\underline{i}} \quad (1.21)$$

où $\mathcal{R}(G; \underline{i})$ désigne le nombre de sous-graphes couvrants de G dont la distribution des nombres cyclomatiques des composantes connexes est \underline{i} . Il est clair que la fonction $f_c = f_c(G; \underline{s})$ est une fonction de graphes, c'est-à-dire qu'elle est invariante sur une classe de graphes isomorphes. Les lemmes 34 et 35 qui concernent $S(G)$ nous permettent de conclure que $f_c(G; \underline{s})$ est une V-fonction, comme le présente le théorème qui suit.

Théorème 37 *La fonction de graphes $f_c(G; \underline{s})$ est une V-fonction.*

Preuve Il suffit de vérifier que $f_c(G; \underline{s})$ satisfait les conditions (i), (ii) et (iii) de la définition d'une V-fonction. Mais la fonction $f_c(G; \underline{s})$ satisfait la condition (i), car pour le graphe $G = 0$, $f_c(G; \underline{s}) = \sum_{H \in S(G)} w_c(H) = w_c(0) = 1$ par (1.14).

Elle satisfait également les conditions (ii) et (iii). La preuve consiste en une simple réécriture des lemmes 34 et 35, puisque $f_c(G; \underline{s}) = |S(G)|_{w_c}$. ■

1.2.2 La fonction $Q(G; t, z)$

La fonction $Q(G; t, z)$ est obtenue de la V-fonction $f_c(G; \underline{s})$ en effectuant un changement de variable. Elle est d'une grande utilité puisqu'elle sert d'élément de définition pour la plupart des objets mathématiques que nous introduisons dans ce travail.

Définition 38 Soit G un graphe. On définit la fonction $Q(G; t, z)$ à partir de la fonction de poids $w_0(G) = t^{p_0(G)} z^{p_1(G)}$. Son expression est donnée par

$$Q(G; t, z) = |S(G)|_{w_0}. \quad (1.22)$$

On appelle cette fonction le *dichromatique* d'un graphe.

La fonction Q peut donc s'exprimer sous la forme d'une somme, c'est-à-dire que

$$Q(G; t, z) = |S(G)|_{w_0} \quad (1.23)$$

$$= \sum_{H \subseteq S(G)} w_0(H) \quad (1.24)$$

$$= \sum_{S \subseteq E(G)} t^{p_0(G|S)} \cdot z^{p_1(G|S)} \quad (1.25)$$

Proposition 39 Soit G un graphe. Les fonctions de poids w_0 et w_c sont liées par le changement de variables suivant:

$$w_0(G) = w_c(G)|_{s_n=tz^n}. \quad (1.26)$$

Preuve Quand on procède, dans l'expression de $w_c(G)$, au changement de variables $s_m = tz^m$, $\forall m \geq 0$, on obtient

$$\begin{aligned} w_c(G)|_{s_n=tz^n} &= \prod_{m \geq 0} (tz^m)^{i_m} \\ &= \prod_{m \geq 0} t^{i_m} z^{mi_m} \\ &= t^{\left(\sum_{m \geq 0} i_m\right)} z^{\left(\sum_{m \geq 0} mi_m\right)}, \end{aligned} \quad (1.27)$$

où $i_m = i_m(G)$ est le nombre de composantes connexes de G dont le nombre cyclomatique est m . On remarque alors que $\sum_{m \geq 0} i_m = p_0(G)$ et que $\sum_{m \geq 0} mi_m = p_1(G)$ en vertu de la proposition 27. En intégrant ces remarques dans l'expression (1.27), on trouve que

$$\begin{aligned} w_c(G)|_{s_n=tz^n} &= t^{p_0(G)} z^{p_1(G)} \\ &= w_0(G). \end{aligned}$$

On trouve bien le résultat souhaité. ■

Proposition 40 *La fonction $Q(G; t, z)$ est une V-fonction.*

Preuve La preuve est simple puisque $Q(G; t, z)$ s'obtient directement de la V-fonction $f_c(G; \underline{s})$ par le changement de variables $s_m = tz^m$ dans la fonction de poids w_c . ■

La proposition 40 permet d'appliquer à la fonction $Q(G; t, z)$ les trois propriétés d'une V-fonction. De plus, l'étude du degré des variables t et z de la fonction $Q(G; t, z)$ nous permet de dégager la proposition suivante:

Proposition 41 *Soit $G = (V, E, I)$ un graphe. Alors*

- (i) *Le degré de $Q(G; t, z)$ en la variable t est $|V|$.*
- (ii) *Le degré de $Q(G; t, z)$ en la variable z est $p_1(G)$.*

Preuve

- (i) Le degré de $Q(G; t, z)$ en la variable t correspond au maximum de $p_0(G|_S)$ sur S , qui est atteint lorsque $S = \emptyset$, où chaque sommet est isolé.
- (ii) Le degré de $Q(G; t, z)$ en la variable z correspond au maximum de $p_1(G|_S)$ sur S . Il est atteint lorsque $S = E$. En effet, lorsque $S = \emptyset$, $p_1(G|_S) = 0$ car $p_0(G|_S) = |V|$. Le fait d'ajouter une arête au sous-ensemble S peut avoir deux conséquences: soit la valeur de $p_1(G|_S)$ est augmentée de 1 (c'est le cas si l'arête en question est ajoutée dans une composante connexe du sous-graphe), soit la valeur de $p_1(G|_S)$ est inchangée (c'est le cas si l'arête en question possède ses extrémités dans deux composantes connexes distinctes). On conclut que le maximum de $p_1(G|_S)$ est atteint lorsque $S = E$, donc en $p_1(G)$.

■

Remarque 42 La preuve de la proposition 41 (ii) montre également que pour tout graphe G , $p_1(G) \geq 0$.

1.2.3 Différents théorèmes concernant la fonction $Q(G; t, z)$

Les théorèmes suivants seront utiles dans les sections à venir, pour manipuler ou simplifier les calculs faits sur la fonction Q .

Théorème 43 *Si G est un graphe résultant de l'union de deux sous-graphes H et K dont l'intersection consiste en exactement un seul sommet et aucune arête, alors*

$$Q(G; t, z) = \frac{1}{t} \cdot Q(H; t, z) \cdot Q(K; t, z). \quad (1.28)$$

Preuve Par hypothèse, $E(H) \cap E(K) = \emptyset$. Soit $S \subseteq E$. On définit S_1 et S_2 par $S_1 = S \cap E(H)$ et $S_2 = S \cap E(K)$. On obtient

$$G|_S = (H|_{S_1}) \cup (K|_{S_2}).$$

Puisque $G|_S$ est un sous-graphe couvrant de G , l'intersection de $H|_{S_1}$ et de $K|_{S_2}$ consiste en exactement un seul sommet et aucune arête. On remarque que

$$p_0(G|_S) = p_0(H|_{S_1}) + p_0(K|_{S_2}) - 1,$$

car le sommet en commun dans H et K fait en sorte que l'on dénombre deux fois la composante connexe de ce sommet. On remarque également que

$$p_1(G|_S) = p_1(H|_{S_1}) + p_1(K|_{S_2}).$$

On développe $Q(G; t, z)$ et on obtient

$$\begin{aligned} Q(G; t, z) &= \sum_{S \subseteq E(G)} t^{p_0(G|_S)} \cdot z^{p_1(G|_S)} \\ &= \sum_{S_1 \subseteq E(G)} \left(\sum_{S_2 \subseteq E(G)} t^{p_0(H|_{S_1}) + p_0(K|_{S_2}) - 1} \cdot z^{p_1(H|_{S_1}) + p_1(K|_{S_2})} \right) \\ &= \frac{1}{t} \cdot Q(H; t, z) \cdot Q(K; t, z). \end{aligned}$$

■

Théorème 44 Si $G = \bullet \text{---} \bullet$ est le graphe constitué de deux sommets et de l'unique arête joignant ces deux sommets, alors

$$Q(\bullet \text{---} \bullet; t, z) = t \cdot (1 + t). \quad (1.29)$$

Preuve Nous pouvons effectuer le calcul directement.

$$\begin{aligned} Q(\bullet \text{---} \bullet; t, z) &= \sum_{S \subseteq E(G)} t^{p_0(G|S)} \cdot z^{p_1(G|S)} \\ &= t^2 z^0 + t^1 z^0 \\ &= t \cdot (1 + t). \end{aligned}$$

■

Théorème 45 Si $G = (V, E, I)$ est un graphe connexe ayant un isthme dont les bouts correspondent aux graphes H et K , alors

$$Q(G; t, z) = \frac{(1 + t)}{t} \cdot Q(H; t, z) \cdot Q(K; t, z). \quad (1.30)$$

Preuve Posons $G = H \cup (\{v_1, v_2\}, \{a\}) \cup K$, où

$$\begin{aligned} I(a) &= \{v_1, v_2\}, \\ H \cap (\{v_1, v_2\}, \{a\}) &= (\{v_1\}, \emptyset), \\ K \cap (\{v_1, v_2\}, \{a\}) &= (\{v_2\}, \emptyset), \\ H \cap K &= \emptyset. \end{aligned}$$

En appliquant deux fois le théorème 43, on obtient

$$Q(G; t, z) = \frac{1}{t^2} \cdot Q(H; t, z) \cdot Q((\{v_1, v_2\}, \{a\}); t, z) \cdot Q(K; t, z).$$

Par (1.29), $Q((\{v_1, v_2\}, \{a\}); t, z) = t(1 + t)$ de sorte que

$$Q(G; t, z) = \frac{(1 + t)}{t} \cdot Q(H; t, z) \cdot Q(K; t, z).$$

■

Corollaire 46 Soit $\text{Ch}(k)$ une chaîne de longueur $k \geq 1$. Alors

$$Q(\text{Ch}(k); t, z) = t(1+t)^k. \quad (1.31)$$

Preuve Ce résultat découle directement des théorèmes 43 et 44. Soit $\text{Ch}(k)$ une chaîne de longueur k . Par l'application répétée $(k-1)$ fois de (1.28), on a

$$Q(\text{Ch}(k); t, z) = \left(\frac{1}{t}\right)^{k-1} \cdot (Q(\bullet \text{---} \bullet; t, z))^k.$$

Par (1.29), on a donc

$$\begin{aligned} Q(\text{Ch}(k); t, z) &= \left(\frac{1}{t}\right)^{k-1} \cdot (t(1+t))^k \\ &= t(1+t)^k. \end{aligned}$$

■

Théorème 47 Soit $\text{Cy}(k)$ un cycle de longueur $k \geq 1$. Alors

$$Q(\text{Cy}(k); t, z) = (t+1)^k - 1 + tz. \quad (1.32)$$

Preuve Par récurrence sur k . Soit $\text{Cy}(k)$ un cycle de longueur $k \geq 1$. Posons $k = 1$. On calcule directement la valeur de $Q(\text{Cy}(k); t, z)$ en utilisant la formule (1.25) et on obtient $Q(\text{Cy}(k); t, z) = t(1+z)$.

Supposons maintenant que le résultat est vrai pour $k = m$, et vérifions que cela implique que le résultat est vrai également pour $k = m+1$. Puisque Q est une V-fonction, on a

$$Q(\text{Cy}(k); t, z) = Q(\text{Cy}(k)_a''; t, z) + Q(\text{Cy}(k)_a'; t, z),$$

où a est un lien de $\text{Cy}(k)$. On remarque que le graphe $\text{Cy}(k)_a''$ correspond au cycle de longueur m . Par l'hypothèse de récurrence, on sait que $Q(\text{Cy}(k)_a''; t, z) = (t+1)^m - 1 + tz$. On remarque également que le graphe $\text{Cy}(k)_a'$ est une chaîne de longueur m . Par le corollaire 46, on a donc $Q(\text{Cy}(k)_a'; t, z) = t(1+t)^m$. On obtient

$$\begin{aligned} Q(\text{Cy}(k); t, z) &= ((t+1)^m - 1 + tz) + (t(1+t)^m) \\ &= (t+1)^{m+1} - 1 + tz. \end{aligned}$$

■

1.3 Le polynôme de Tutte

Le polynôme de Tutte tel que nous le connaissons aujourd'hui fut d'abord nommé le *dichromate* par M. Tutte (Tutte, 1984).

Définition 48 Soit G un graphe. Le *polynôme de Tutte* (ou *dichromate*), noté $\chi(G) = \chi(G; x, y)$, est défini par

$$\chi(G; x, y) = (x - 1)^{-p_0(G)} Q(G; x - 1, y - 1). \quad (1.33)$$

Proposition 49 Soit $G = (V, E, I)$ un graphe. L'expression (1.33) est équivalente à

$$\chi(G; x, y) = \sum_{S \subseteq E} (x - 1)^{p_0(G|_S) - p_0(G)} (y - 1)^{p_1(G|_S)}, \quad (1.34)$$

où la somme est prise sur tous les sous-ensembles d'arêtes de E .

Preuve La preuve se fait directement à partir de la définition de la fonction $Q(G; t, z)$.

■

Remarque 50 En vertu de la proposition 49, χ est bien un polynôme en les variables x et y . On constate également que pour tout graphe $G = (V, E, I)$ et pour tout sous-ensemble $S \subseteq E$, les expressions $p_0(G|_S) - p_0(G)$ et $p_1(G|_S)$ sont supérieures ou égales à zéro, de sorte que χ ne contient pas de puissance négative de x ou y .

La proposition suivante établit la valeur du polynôme de Tutte pour quatre cas de graphes élémentaires.

Proposition 51 Le polynôme de Tutte χ est tel que

(i) Si $G = 0$ est le graphe nul, alors

$$\chi(0; x, y) = 1. \quad (1.35)$$

(ii) Si G est le graphe formé d'un unique sommet sans arêtes, alors

$$\chi(G; x, y) = 1. \quad (1.36)$$

- (iii) Si $G = (\bullet \text{---} \bullet)$ est le graphe formé d'une unique arête joignant deux sommets, alors

$$\chi(\bullet \text{---} \bullet; x, y) = x. \quad (1.37)$$

- (iv) Si $G = \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \bigcirc \\ \bullet \end{array} \right)$ est le graphe formé d'une unique boucle, alors

$$\chi\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \bigcirc \\ \bullet \end{array}; x, y \right) = y. \quad (1.38)$$

Preuve

- (i) Soit G le graphe nul. Par convention, $p_0(G) = 0$ de sorte qu'en substituant cette valeur dans l'expression (1.33) et en utilisant le fait que $Q(G; t, z)$ est une V-fonction, on obtient $\chi(G; x, y) = (x - 1)^0 Q(G; x - 1, y - 1) = 1 \cdot 1 = 1$.
- (ii) Soit G le graphe formé d'un unique sommet sans arêtes. Par (1.34), on a $\chi(G; x, y) = (x - 1)^{1-1} (y - 1)^{0-1+1} = 1$.
- (iii) Soit $\bullet \text{---} \bullet$ le graphe formé d'une unique arête joignant deux sommets. On sait par le théorème 44 que

$$Q(\bullet \text{---} \bullet; t, z) = t \cdot (1 + t).$$

On a donc

$$\begin{aligned} \chi(\bullet \text{---} \bullet; x, y) &= (x - 1)^{-1} \cdot Q(\bullet \text{---} \bullet; x - 1, y - 1) \\ &= (x - 1)^{-1} \cdot (x - 1) \cdot x \\ &= x. \end{aligned}$$

- (iv) Soit G le graphe formé d'une unique boucle. Par (1.34), on a

$$\begin{aligned} \chi(G; x, y) &= (x - 1)^{1-1} (y - 1)^{0-1+1} + (x - 1)^{1-1} (y - 1)^{1-1+1} \\ &= y. \end{aligned}$$

■

La proposition suivante établit, pour un graphe quelconque, le degré du polynôme de Tutte en les variables x et y .

Proposition 52 *Soit $G = (V, E, I)$ un graphe et soit $\chi(G; x, y)$ le polynôme de Tutte de ce graphe.*

- (i) *Le degré de $\chi(G; x, y)$ en la variable x est $|V| - p_0(G)$.*
- (ii) *Le degré de $\chi(G; x, y)$ en la variable y est $p_1(G)$.*

Preuve

- (i) Par la proposition 41 (i), $\deg_x(Q(G; x, y)) = |V|$. La formule (1.33) du polynôme de Tutte indique que $\chi(G; x, y) = (x - 1)^{-p_0(G)} Q(G; x - 1, y - 1)$, de sorte que

$$\begin{aligned} \deg_x(\chi(G; x, y)) &= \deg \left((x - 1)^{-p_0(G)} Q(G; x - 1, y - 1) \right) \\ &= \deg_x \left((x - 1)^{-p_0(G)} \right) + \deg_x(Q(G; x - 1, y - 1)) \\ &= |V| - p_0(G) \end{aligned}$$

- (ii) Par la proposition 41 (ii), $\deg_y(Q(G; x, y)) = p_1(G)$. Donc

$$\begin{aligned} \deg_y(\chi(G; x, y)) &= \deg_y \left((x - 1)^{-p_0(G)} Q(G; x - 1, y - 1) \right) \\ &= \deg_y \left((x - 1)^{-p_0(G)} \right) + \deg_y(Q(G; x - 1, y - 1)) \\ &= p_1(G) \end{aligned}$$

■

Le polynôme de Tutte est défini directement à partir de la V-fonction $Q(G; t, z)$, ce qui nous permet de déduire les deux théorèmes qui suivent. On remarque qu'une V-fonction doit prendre la valeur 1 lorsqu'elle est évaluée sur le graphe nul, ce qui a été montré à la proposition 51.

Théorème 53 *Soit G un graphe résultant de l'union de deux sous-graphes H et K dont l'intersection est soit nulle, soit constituée d'exactly un sommet et d'aucune arête.*

Alors

$$\chi(G; x, y) = \chi(H; x, y) \cdot \chi(K; x, y). \quad (1.39)$$

Preuve

- (i) Supposons que l'intersection de H et K soit nulle. Dans ce cas, $G = H + K$ est la somme disjointe de H et K . On a donc $p_0(G) = p_0(H) + p_0(K)$, de sorte que

$$\chi(G; x, y) = (x-1)^{-(p_0(H)+p_0(K))} Q(H+K; x-1, y-1)$$

Puisque Q est une V-fonction, on obtient

$$\begin{aligned} \chi(G; x, y) &= (x-1)^{-p_0(H)} Q(H; x-1, y-1) \cdot (x-1)^{-p_0(K)} Q(K; x-1, y-1) \\ &= \chi(H; x, y) \cdot \chi(K; x, y). \end{aligned}$$

- (ii) Supposons que l'intersection de H et K consiste en exactement un seul sommet et aucune arête. Nous avons que $p_0(G) = p_0(H) + p_0(K) - 1$. En utilisant (1.33) et (1.28), on obtient

$$\begin{aligned} \chi(G; x, y) &= (x-1)^{-p_0(G)} Q(G; x-1, y-1) \\ &= (x-1)^{-(p_0(H)+p_0(K)-1)} \cdot \frac{Q(H; x-1, y-1) \cdot Q(K; x-1, y-1)}{(x-1)} \\ &= (x-1)^{-p_0(H)} Q(H; x-1, y-1) \cdot (x-1)^{-p_0(K)} Q(K; x-1, y-1) \\ &= \chi(H; x, y) \cdot \chi(K; x, y). \end{aligned}$$

■

Théorème 54 *Si $G = (V, E, I)$ est un graphe et si $a \in E$ est l'une de ses arêtes qui n'est ni une boucle ni un isthme, alors*

$$\chi(G; x, y) = \chi(G'_a; x, y) + \chi(G''_a; x, y). \quad (1.40)$$

Preuve On utilise (1.33) et on obtient

$$\begin{aligned}
\chi(G; x, y) &= (x-1)^{-p_0(G)} Q(G; x-1, y-1) \\
&= (x-1)^{-p_0(G)} Q(G'_a; x-1, y-1) + (x-1)^{-p_0(G)} Q(G''_a; x-1, y-1) \\
&= (x-1)^{-p_0(G'_a)} Q(G'_a; x-1, y-1) + (x-1)^{-p_0(G''_a)} Q(G''_a; x-1, y-1) \\
&= \chi(G'_a; x, y) + \chi(G''_a; x, y).
\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que a n'est pas une boucle pour décomposer Q récursivement. On a également utilisé le fait que a n'est pas un isthme, et donc que $p_0(G) = p_0(G'_a) = p_0(G''_a)$.

■

Le théorème 54 exclut les cas où l'arête est une boucle ou un isthme. Dans ces cas-là, nous avons les propositions suivantes:

Proposition 55 *Si $G = (V, E, I)$ est un graphe et si $a \in E$ est une boucle de G , alors*

$$\chi(G; x, y) = y \cdot \chi(G'_a; x, y) = y \cdot \chi(G''_a; x, y). \quad (1.41)$$

Preuve Par le théorème 53 sur la multiplicativité du polynôme de Tutte sur les graphes dont l'intersection est d'un sommet et d'aucune arête (c'est-à-dire qui partagent un point d'articulation), on a directement que

$$\begin{aligned}
\chi(G; x, y) &= \chi \left(\text{boucle}; x, y \right) \cdot \chi(G'_a; x, y) \\
&= y \cdot \chi(G'_a; x, y).
\end{aligned}$$

On remarque que dans le cas où a est une boucle, $G'_a = G''_a$, ce qui fait que

$$\chi(G; x, y) = y \cdot \chi(G'_a; x, y) = y \cdot \chi(G''_a; x, y).$$

■

Proposition 56 *Si $G = (V, E, I)$ est un graphe et si $a \in E$ est un isthme de G , alors*

$$\chi(G; x, y) = x \cdot \chi(G'_a; x, y) = x \cdot \chi(G''_a; x, y). \quad (1.42)$$

Preuve Posons $G = H \cup (\{v_1, v_2\}, \{a\}) \cup K$, où

$$\begin{aligned} I(a) &= \{v_1, v_2\}, \\ H \cap (\{v_1, v_2\}, \{a\}) &= (\{v_1\}, \emptyset), \\ K \cap (\{v_1, v_2\}, \{a\}) &= (\{v_2\}, \emptyset), \\ H \cap K &= \emptyset. \end{aligned}$$

En utilisant deux fois le théorème 53, on obtient

$$\chi(G; x, y) = \chi(H; x, y) \cdot \chi(\bullet \text{---} \bullet; x, y) \cdot \chi(K; x, y).$$

Comme $\chi(\bullet \text{---} \bullet; x, y) = x$ et $H \cap K = \emptyset$, on obtient

$$\chi(G; x, y) = x \cdot \chi(G'_a; x, y).$$

Remarquons que $G'_a = H + K$ et posons $v_1 = v_2$. Dans ce cas, $H \cup K = G''_a$ et on constate par (1.39) que

$$\chi(H + K; x, y) = \chi(H \cup K; x, y),$$

ce qui fait que

$$\chi(G; x, y) = x \cdot \chi(G''_a; x, y).$$

■

Voici maintenant quelques résultats concernant l'évaluation du polynôme de Tutte sur des cas particuliers de graphes.

Proposition 57 *Soit $Cy(k)$ un cycle de longueur $k \geq 1$. Le polynôme de Tutte de $Cy(k)$ est donné par*

$$\chi(Cy(k); x, y) = y + x + x^2 + \dots + x^{k-1}. \quad (1.43)$$

Preuve On sait par (1.32) que

$$Q(Cy(k); t, z) = (t+1)^k - 1 + tz.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 \chi(\text{Cy}(k); x, y) &= (x-1)^{-p_0(\text{Cy}(k))} Q(\text{Cy}(k); x-1, y-1) \\
 &= (x-1)^{-1} \left(x^k - 1 + (x-1)(y-1) \right) \\
 &= \frac{(x^k - 1)}{(x-1)} + (y-1) \\
 &= y + x + x^2 + \dots + x^{k-1}.
 \end{aligned}$$

■

Remarque 58 La proposition 57 pour $k = 1$ est cohérente avec la formule (1.38), à savoir que $\chi \left(\text{loop}; x, y \right) = y$ dans les deux cas.

Proposition 59 Soit $\text{Ch}(k)$ une chaîne de longueur k . Le polynôme de Tutte de $\text{Ch}(k)$ est donné par

$$\chi(\text{Ch}(k); x, y) = x^k. \quad (1.44)$$

Preuve On utilise le théorème 53 et la proposition 51 (iii) et on trouve directement que $\chi(\text{Ch}(k); x, y) = x^k$. ■

Proposition 60 Si G est un graphe constitué de deux sommets unis par k arêtes, $k \geq 1$, alors le polynôme de Tutte $\chi(G; x, y)$ est donné par

$$\chi(G; x, y) = x + y + y^2 + \dots + y^{k-1}. \quad (1.45)$$

Preuve Par récurrence sur k . Pour $k = 1$, G est un isthme et dans ce cas, $\chi(G; x, y) = x$.

Pour le cas où il y a $k + 1$ arêtes, on a par le théorème 54 que $\chi(G; x, y) = \chi(G'_a; x, y) + \chi(G''_a; x, y)$, où a est l'une des $k + 1$ arêtes. Dans ce cas, G'_a possède k arêtes joignant les deux sommets et G''_a est un unique sommet possédant k boucles. Par l'hypothèse de récurrence, on a donc

$$\chi(G; x, y) = (x + y + y^2 + \dots + y^{k-1}) + \chi(G''_a; x, y).$$

On utilise ensuite k fois la proposition 55 pour trouver que

$$\chi(G; x, y) = x + y + y^2 + \dots + y^{k-1} + y^k.$$

■

Dans la proposition 49, le polynôme de Tutte d'un graphe est défini sur la base d'une somme évaluée sur ses sous-graphes couvrants. On remarque que la somme se fait sur des monômes en $(x - 1)$ et $(y - 1)$. Il est possible de définir le polynôme de Tutte d'un graphe d'une autre façon, en considérant plutôt la somme prise sur les arbres couvrants du graphe, en plus de faire la somme de monômes en x et y directement. Tout d'abord, on introduit les concepts d'ensembles d'arêtes intérieurement actives et extérieurement actives.

Définition 61 Soit $G = (V, E, I)$ un graphe connexe dont les n arêtes ont été étiquetées par $1, 2, 3, \dots, n$. Cet étiquetage est arbitraire. Soit $T = (V_1, E_1, I|_{E_1})$ un arbre couvrant de G et soit une arête $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ de T . On note par T_i le graphe T'_i . Puisque T est un arbre, T_i possède deux composantes connexes (qui sont des arbres).

On dit de l'arête i de T qu'elle est *intérieurement active dans T* si toute arête j de $G|_{E-E_1}$ qui possède ses extrémités dans chacune des composantes de T_i satisfait $i < j$.

Maintenant, soit $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ une arête qui n'est pas dans T (i est externe à T). On dit de l'arête i qu'elle est *extérieurement active dans T* si toute arête j de G appartenant à l'unique chemin dans T qui a pour origine et arrivée les extrémités de i satisfait $i < j$. On remarque que si a est une boucle, le chemin débute et se termine au sommet d'attache de la boucle.

Voici un exemple pour illustrer ces deux concepts.

Exemple 62 Soit $\text{Cy}(3)$ le cycle de longueur 3 apparaissant à la figure 1.8 dont on a étiqueté arbitrairement les arêtes.

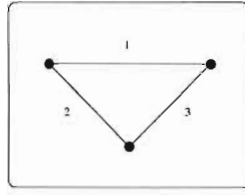


Figure 1.8 Le graphe $Cy(3)$ étiqueté arbitrairement

Considérons l'arbre couvrant T de $Cy(3)$ tel qu'illustré à la figure 1.9 (i). On choisit l'arête 1 de T , ce qui donne le graphe T_1 que l'on peut voir à la figure 1.9 (ii).

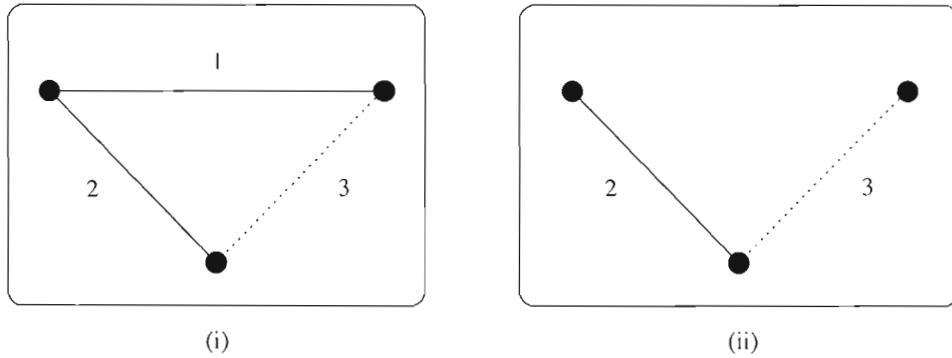


Figure 1.9 (i) Un arbre couvrant T du graphe $Cy(3)$ (ii) Les deux composantes de T_1

On remarque que l'arête 3 possède ses extrémités dans T_1 , et qu'elle est la seule arête de $Cy(3) \setminus \{3\}$. Puisque $3 > 1$, l'arête 1 est *intérieurement active* dans T .

Pour illustrer le concept d'arête extérieurement active, considérons l'arête 3 qui n'est pas dans T . L'unique chemin dans T qui a pour source et pour arrivée les extrémités de l'arête 3 est formé des arêtes 1 et 2 (c'est l'arbre T). Puisque $3 > 2$ et $3 > 1$, l'arête 3 n'est pas *extérieurement active* dans T .

Par le même raisonnement, on observe que l'arête 2 est également intérieurement active.

Théorème 63 Soit G un graphe connexe dont on a étiqueté arbitrairement les arêtes. Alors le polynôme de Tutte de G est

$$\chi(G; x, y) = \sum_{T \subseteq G} x^{a(T)} y^{b(T)}, \quad (1.46)$$

où $a(T)$ désigne le nombre d'arêtes qui sont intérieurement actives dans T , $b(T)$ désigne le nombre d'arêtes qui sont extérieurement actives dans T et la somme est prise sur tous les arbres couvrants de G .

Preuve Pour la preuve, veuillez vous référer au livre de Tutte (1984). ■

Voici un exemple qui illustre le théorème 63 pour le cycle de longueur 3.

Exemple 64 Soit $Cy(3)$ le cycle de longueur 3 tel qu'apparaissant à la figure 1.8. L'exemple 62 a montré que pour l'arbre couvrant T de la figure 1.9 (i), les arêtes 1 et 2 sont intérieurement actives et l'arête 3 n'est pas extérieurement active. La contribution de cet arbre couvrant dans la somme est donc de $x^2 y^0$.

En appliquant le même raisonnement avec l'arbre couvrant formé des arêtes 1 et 3, on trouve que l'arête 1 est intérieurement active ($1 < 2$), l'arête 3 n'est pas intérieurement active ($3 \not< 2$), et l'arête 2 n'est pas extérieurement active ($2 \not< 1$). La contribution de cet arbre couvrant dans la somme est donc de $x^1 y^0$.

En appliquant le même raisonnement avec l'arbre couvrant formé des arêtes 2 et 3, on trouve que les arêtes 2 et 3 ne sont pas intérieurement actives ($2 \not< 1$ et $3 \not< 1$), et l'arête 1 est extérieurement active ($1 < 2$ et $1 < 3$). La contribution de cet arbre couvrant dans la somme est donc de $x^0 y^1$.

On trouve finalement que $\chi(Cy(3); x, y) = y + x + x^2$, qui correspond bien au résultat attendu par la proposition 57, avec $k = 3$.

CHAPITRE II

LES SPÉCIALISATIONS DU POLYNÔME DE TUTTE

2.1 Le polynôme de Tutte et la théorie des graphes

Certaines spécialisations du polynôme de Tutte donnent lieu à des applications combinatoires intéressantes, notamment pour dénombrer les arbres couvrants d'un graphe.

Proposition 65 *Si $G = (V, E, I)$ est un graphe connexe, alors $\chi(G; 1, 1)$ représente le nombre d'arbres couvrants de G .*

Preuve En prenant $x = y = 1$, l'expression (1.34) de $\chi(G)$ devient

$$\chi(G; 1, 1) = \sum_{S \subseteq E} (0)^{p_0(G|_S) - p_0(G)} (0)^{p_1(G|_S)}$$

Les seuls termes non nuls de la somme sont ceux pour lesquels

$$p_0(G|_S) - p_0(G) = 0 \text{ et } p_1(G|_S) = 0. \quad (2.1)$$

Soit $S \subseteq E$ tel que $G|_S$ respecte les conditions (2.1). Puisque G est un graphe connexe par hypothèse, on a $p_0(G|_S) = p_0(G) = 1$. Donc $(G|_S)$ est un sous-graphe connexe. De plus, on a $|E(G|_S)| - |V(G|_S)| + p_0(G|_S) = 0$, de sorte que $|E(G|_S)| = |V(G|_S)| - 1$.

On en conclut que $(G|_S)$ est un arbre couvrant de G . Comme $\chi(G; 1, 1)$ est une somme sur tous les sous-ensembles $S \subseteq E$ qui respectent les conditions (2.1), on a bien que $\chi(G; 1, 1)$ dénombre les arbres couvrants du graphe G . ■

Remarque 66 Cette proposition est liée au théorème 63. En effet, en posant $x = y = 1$ dans l'expression (1.46), on voit directement que $\chi(G; 1, 1)$ dénombre les arbres couvrants de G .

Lorsque nous considérons les graphes qui ne sont pas forcément connexes, l'évaluation du polynôme de Tutte en les valeurs $x = y = 1$ procure un résultat semblable.

Proposition 67 *Si G est un graphe (pas forcément connexe), alors $\chi(G; 1, 1)$ représente le nombre de forêts couvrantes de G .*

Preuve Supposons que G comporte k composantes connexes, notons-les H_1, H_2, \dots, H_k . Par le résultat de la proposition 65, $\chi(H_i; 1, 1)$ dénombre les arbres couvrants de H_i , pour $1 \leq i \leq k$. On remarque qu'une forêt couvrante de G s'obtient par un choix indépendant d'arbres couvrants dans chaque composante connexe de G . Donc en appliquant $(k - 1)$ fois le théorème 53, on a

$$\chi(G; 1, 1) = \prod_{i=1}^k \chi(H_i; 1, 1),$$

qui dénombre les forêts couvrantes de G . ■

2.1.1 Le polynôme chromatique

Un sujet intéressant à considérer en combinatoire de la théorie des graphes concerne les colorations possibles d'un graphe. Par exemple, pour un graphe donné, on dénombre les façons de colorier les sommets selon une règle donnée. Dans notre cas, on s'intéresse aux colorations propres d'un graphe. Tout d'abord, voici la définition d'une coloration d'un graphe.

Définition 68 Une *coloration* d'un graphe $G = (V, E)$ consiste en une fonction $f : V \longrightarrow \mathbb{N}$, c'est-à-dire que chaque sommet de G se voit attribuer une couleur (plus précisément une étiquette correspondant à une couleur).

Il existe plusieurs façons de colorier un graphe, par exemple les colorations propres et les λ -colorations.

Définition 69 Une *coloration propre* d'un graphe G consiste en une coloration telle que n'importe quelle paire de sommets liés par une arête soit de couleur différente.

Définition 70 Soit $\lambda \geq 0$ un entier. Une λ -coloration d'un graphe $G = (V, E)$ consiste en une coloration dont l'ensemble image est restreint aux entiers positifs inférieurs ou égaux à λ , c'est-à-dire que c'est une coloration définie par une fonction $f : V \longrightarrow \{1, 2, 3, \dots, \lambda\}$.

Dans ce travail, on considérera les λ -colorations propres d'un graphe.

Remarque 71 S'il existe une coloration propre d'un graphe G , alors G est sans boucle.

Définition 72 Le *nombre chromatique* d'un graphe est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour faire une coloration propre du graphe.

Définition 73 Soit $\lambda \in \mathbb{N}$. On définit $P(G; \lambda)$ en fonction de λ comme étant le *nombre de λ -colorations propres* possibles d'un graphe.

Il est facile de voir que pour tout graphe $G = (V, E)$, $P(G; \lambda)$ est un polynôme en la variable λ . En effet, soit $c(G; k)$ le nombre de colorations propres surjectives du graphe G , $V \longrightarrow [k]$. Alors $P(G; \lambda) = \sum_{k \geq 0} \binom{\lambda}{k} c(G; k)$. Comme les $c(G; k)$ sont presque tous nuls, cette somme est finie et $P(G; \lambda)$ est donc un polynôme. Pour cette raison, on appelle $P(G; \lambda)$ le *polynôme chromatique* de G .

Proposition 74 Le *polynôme chromatique* $P(G; \lambda)$ satisfait les trois conditions suivantes:

(i) Si G est le graphe nul, alors

$$P(G; \lambda) = 1. \quad (2.2)$$

- (ii) Si $H + K$ est le graphe résultant de la somme de deux sous-graphes disjoints H et K , alors

$$P(H + K; \lambda) = P(H; \lambda) \cdot P(K; \lambda). \quad (2.3)$$

- (iii) Si G est un graphe et si a est un lien de G , alors

$$P(G; \lambda) = P(G'_a; \lambda) - P(G''_a; \lambda). \quad (2.4)$$

Preuve

- (i) On adopte la convention que l'ensemble vide de sommet possède exactement une image dans \mathbb{N} , de sorte que $P(G; \lambda) = 1$.
- (ii) Dans ce cas, les λ -colorations propres de G sont les combinaisons possibles des λ -colorations propres de H et des λ -colorations propres de K .
- (iii) Supposons que l'arête a possède ses extrémités aux sommets x et y . Alors les λ -colorations propres de G peuvent être associées aux λ -colorations propres de G'_a pour lesquelles x et y ont des couleurs différentes. On peut également associer, aux λ -colorations propres de G'_a pour lesquelles x et y ont la même couleur, les λ -colorations propres de G''_a . En effet, dans G''_a , les sommets x et y deviennent un unique sommet, donc on considère qu'ils ont la même couleur. Cela nous permet de conclure que $P(G; \lambda) = P(G'_a; \lambda) - P(G''_a; \lambda)$.

■

On remarque que la proposition 74 permet de déduire aisément que pour tout graphe $G = (V, E)$, l'expression $(-1)^{|V(G)|} P(G; \lambda)$ est une V-fonction.

Proposition 75 Soit $m \in \mathbb{N}$ et soit $G_m = (\{x_0\}, E)$ le graphe formé de l'unique sommet x_0 et d'un bouquet de m boucles. Pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$-P(G_m; \lambda) = Q(G_m; -\lambda, -1). \quad (2.5)$$

Preuve Pour $m = 0$, il est évident que $-P(G_m; \lambda) = -\lambda$, car il y a λ choix de couleurs pour x_0 . Ensuite, pour $m > 0$, il est évident que $-P(G_m; \lambda) = 0$, puisqu'une seule boucle suffit pour qu'il n'y ait aucune coloration propre possible de x_0 . On a donc

$$-P(G_m; \lambda) = \begin{cases} -\lambda & \text{si } m = 0, \\ 0 & \text{si } m > 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Ensuite, on évalue $Q(G_m; -\lambda, -1)$. Pour $m = 0$, on calcule directement que $Q(G_0; -\lambda, -1) = -\lambda$. Pour $m > 0$, on a

$$\begin{aligned} Q(G_m; -\lambda, -1) &= \sum_{S \subseteq E(G)} (-\lambda)^{p_0(G_m|S)} \cdot (-1)^{p_1(G_m|S)} \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-\lambda) \cdot (-1)^k \\ &= (-\lambda) \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^k \\ &= 0. \end{aligned}$$

On a bien le résultat souhaité. ■

Proposition 76 Soit $G = (V, E)$ un graphe. Le polynôme chromatique de G est donné par

$$P(G; \lambda) = (-1)^{|V|} Q(G; -\lambda, -1). \quad (2.7)$$

Preuve Ceci découle du fait que $(-1)^{|V|} P(G; \lambda)$ et $Q(G; -\lambda, -1)$ sont des V -fonctions et qu'elles prennent les mêmes valeurs sur les graphes G_m , $\forall m \in \mathbb{N}$. On conclut en utilisant la proposition 31 sur l'unicité des V -fonctions. ■

La proposition 76 permet d'établir le corollaire qui suit.

Corollaire 77 Soit $G = (V, E)$ un graphe. Le polynôme chromatique $P(G; \lambda)$ est donné par

$$P(G; \lambda) = (-1)^{r(G)} \lambda^{p_0(G)} \chi(G; 1 - \lambda, 0), \quad (2.8)$$

où $r(G) = |V| - p_0(G)$ représente le rang de G .

Preuve Tout d'abord, remarquons par (1.33) que

$$Q(G; x-1, y-1) = (x-1)^{p_0(G)} \chi(G; x, y).$$

Ensuite, on procède directement à partir de (2.7) et on obtient

$$\begin{aligned} P(G; \lambda) &= (-1)^{|V|} Q(G; -\lambda, -1) \\ &= (-1)^{|V|} (-\lambda)^{p_0(G)} \chi(G; 1-\lambda, 0) \\ &= (-1)^{|V|-p_0(G)} \lambda^{p_0(G)} \chi(G; 1-\lambda, 0). \end{aligned}$$

■

2.1.2 Le polynôme de flot

Le concept de flot sur un graphe présuppose qu'on s'est donné une orientation du graphe. On verra toutefois que les principaux concepts et résultats sur les flots sont indépendants de l'orientation choisie. En guise de rappel pour les notions d'orientation d'un graphe et de multigraphe orienté, vous pouvez consulter les définitions 17 et 19 du chapitre 1.

Avant de définir la notion de flot sur un graphe, on introduit d'abord les concepts de matrice d'incidence et de cocycle.

Définition 78 Soit $G = (V, E, \alpha, \beta)$ un multigraphe orienté avec $|V| = n$ et $|E| = m$. On suppose que les ensembles V et E sont munis d'un ordre total. En fait, on suppose que $V = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ et $E = \{1, 2, 3, \dots, m\}$. La *matrice d'incidence* $M(G)$ de G , de format $n \times m$, est construite en considérant, pour chaque $v \in V$, la ligne $\omega(v) = (\omega_1(v), \omega_2(v), \dots, \omega_m(v)) \in \mathbb{R}^m$ définie par

$$\omega_i(v) = \begin{cases} +1 & \text{si } \alpha(i) = v \neq \beta(i), \\ -1 & \text{si } \beta(i) = v \neq \alpha(i), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On remarque que la matrice d'incidence indique pour chaque arête (chaque colonne) quelle est la source (+1) et le but (-1). Lorsqu'une colonne est nulle, cela signifie que l'arête est une boucle, sans que l'on puisse toutefois en désigner l'extrémité.

Définition 79 Un *cocycle* de G est un vecteur dans \mathbb{R}^m obtenu en faisant la somme de lignes de la matrice d'incidence $M(G)$ correspondant à un sous-ensemble U de V , c'est-à-dire que c'est un vecteur de la forme

$$\omega(U) = \sum_{u \in U} \omega(u).$$

On constate aisément que pour $\omega(U) = (\omega_1(U), \omega_2(U), \dots, \omega_m(U))$,

$$\omega_i(U) = \begin{cases} +1 & \text{si } i \text{ est un arc sortant de } U, \\ -1 & \text{si } i \text{ est un arc entrant dans } U, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans ce contexte, un *arc entrant* dans U est un arc dont la source n'est pas dans U et dont le but est dans U . De même, un *arc sortant* de U est un arc dont la source est dans U et dont le but n'est pas dans U .

Remarque 80 Le rang de la matrice d'incidence $M(G)$, $\text{rg}(M(G))$, est égal au rang de G , $r(G)$. On a donc $r(G) = |V| - p_0(G) = \text{rg}(M(G)) = \dim \text{Cocyc}(G)$, où $\text{Cocyc}(G)$ est l'espace vectoriel engendré par les cocycles de G .

Remarque 81 Chaque $\omega(v)$ est lui-même un cocycle, pour tout $v \in V$.

Définition 82 Soit $G = (V, E, D, \alpha, \beta)$ un multigraphe orienté où $E = \{1, 2, 3, \dots, m\}$. Un *flot* sur G est un vecteur $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m) \in \mathbb{R}^m$ ($\varphi_i : E \rightarrow \mathbb{R}$ désigne le *flux* sur l'arc i) satisfaisant à un principe de conservation de la matière analogue à la première loi de Kirchoff pour les courants électriques, qui se formule ainsi:

$$\forall v \in V, \quad \langle \omega(v), \varphi \rangle = 0. \quad (2.9)$$

Ici, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel.

Définition 83 Soit $G = (V, E, D, \alpha, \beta)$ un multigraphe orienté et soit φ un flot sur G . Le *flux entrant* dans un sommet $v \in V$, noté $\varphi^-(v)$, est défini comme étant $\varphi^-(v) = \sum_{\beta(i)=v} \varphi_i$. Autrement dit, le flux entrant dans un sommet v correspond à la somme de tous les flux circulant sur les arcs pour lesquels le sommet v est le but.

De la même manière, le *flux sortant* d'un sommet $v \in V$, noté $\varphi^+(v)$, est défini comme étant $\varphi^+(v) = \sum_{\alpha(i)=v} \varphi_i$. Autrement dit, le flux sortant d'un sommet v correspond à la somme de tous les flux circulant sur les arcs pour lesquels le sommet v est la source.

Remarque 84 La condition (2.9) est alors équivalente à la relation suivante:

$$\forall v \in V, \varphi^-(v) = \varphi^+(v).$$

Proposition 85 Soit $G = (V, E, \alpha, \beta)$ un multigraphe orienté et soit $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$. On a les trois propriétés suivantes:

- (i) φ est un flot sur $G \iff \langle \omega(U), \varphi \rangle = 0, \forall U \subseteq V$.
- (ii) Si la condition (2.9) est satisfaite pour tous les sommets $v \in V - \{v_0\}$, alors elle est également satisfaite en v_0 . On obtient ainsi un flot sur G .
- (iii) Si φ est un flot sur G et $e \in E$ est un isthme, alors le flux circulant sur e vaut 0.

Preuve

(i) (\implies) Découle directement du principe (2.9) par linéarité.

(\impliedby) On prend $U = \{v\}, v \in V$.

(ii) On a $\omega(v_0) = -\omega(V - \{v_0\})$ de sorte que

$$\langle \omega(v_0), \varphi \rangle = -\langle \omega(V - \{v_0\}), \varphi \rangle.$$

Par hypothèse, $\langle \omega(V - \{v_0\}), \varphi \rangle = 0$ et donc $\langle \omega(v_0), \varphi \rangle = 0$, ce qui veut dire que la condition (2.9) est satisfaite en v_0 .

(iii) Ceci est une conséquence directe des deux énoncés précédents. Soit $e \in E$ avec $\alpha(e) = x, \beta(e) = y$ l'isthme en question, avec $\{x, y\} \in V$. Considérons $H =$ composante connexe de x dans $G - \{e\}$. On a $H = (V_H, E_H, \alpha, \beta)$. Alors $\forall v \in V_H, v \neq x$, on a $\langle \omega(v), \varphi \rangle_H = 0$. Par (ii), on a donc $\langle \omega(x), \varphi \rangle_H = 0$. Puisque $\langle \omega(x), \varphi \rangle_G = 0$, il faut nécessairement que $\varphi(e) = 0$.

■

Définition 86 Soit $G = (V, E, D, \alpha, \beta)$ un multigraphe orienté et $\lambda \geq 1$ un entier. Un λ -flot est un flot à valeur dans le groupe abélien $\mathbb{Z}/\lambda\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, \dots, \lambda - 1\}$.

Ce qui nous intéresse particulièrement dans ce travail, c'est de dénombrer les λ -flots à flux non nuls sur un multigraphe orienté quelconque, c'est-à-dire les λ -flots tels que $\varphi(i) \neq 0, \forall i \in E$.

Remarque 87 On peut généraliser la définition 86 en prenant plutôt les valeurs dans n'importe quel groupe abélien d'ordre λ . L'expression (2.29), présentée plus loin dans cette section, montre que le nombre de λ -flots à flux non nuls sur un graphe ne dépend que de l'ordre du groupe abélien choisi, et non de la structure du groupe.

Définition 88 Soit $\lambda \in \mathbb{N}$ et soit G un multigraphe orienté. On note $N(G; \lambda)$ le nombre de λ -flots sur G , et $N^*(G; \lambda)$ le nombre de λ -flots à flux non nuls sur G .

Définition 89 Soit $\lambda \in \mathbb{N}$. On définit les ensembles suivants:

$\Phi(G; \lambda) :=$ L'ensemble de tous les λ -flots sur G .

$\Phi^*(G; \lambda) :=$ L'ensemble de tous les λ -flots à flux non nuls sur G .

Remarque 90 $N(G; \lambda) = |\Phi(G; \lambda)|$ et $N^*(G; \lambda) = |\Phi^*(G; \lambda)|$, pour tout multigraphe orienté G .

Le lemme qui suit sera utile pour démontrer la proposition 94.

Lemme 91 Soit $G = (V, E, \alpha, \beta)$ un multigraphe orienté et soit a un lien avec $\alpha(a) = x, \beta(a) = y$. Considérons $\Phi^*(G''_a)$ l'ensemble des flots à flux non nuls circulant sur G''_a et $\widehat{\Phi}_a(G)$ l'ensemble des flots circulant sur G à flux non nuls sauf possiblement sur l'arc a . Alors il existe une bijection

$$\Phi^*(G''_a) \xrightarrow{\sim} \widehat{\Phi}_a(G) \quad (2.10)$$

qui associe, à chaque flot $\varphi \in \Phi^*(G''_a)$, un flot $\widehat{\varphi} \in \widehat{\Phi}_a(G)$. Le flot $\widehat{\varphi}$ est tel que $\widehat{\varphi}(e) = \varphi(e)$, $\forall e \in E, e \neq a$. La valeur du flux $\widehat{\varphi}(a)$ sur l'arc a est uniquement déterminée par

$$\widehat{\varphi}(a) = \widehat{\varphi}^+(y) - \sum_{\{e \in E, e \neq a | \beta(e)=y\}} \widehat{\varphi}(e) = \widehat{\varphi}^-(x) - \sum_{\{e \in E, e \neq a | \alpha(e)=x\}} \widehat{\varphi}(e). \quad (2.11)$$

Preuve Soit $G = (V, E, \alpha, \beta)$ un multigraphe orienté et soit a un lien de G avec $\alpha(a) = x, \beta(a) = y$. Soit $\lambda \geq 2$ un entier et soit $\varphi \in \Phi^*(G''_a)$ un λ -flot à flux non nuls défini sur G''_a . On construit le λ -flot $\widehat{\varphi} \in \widehat{\Phi}_a(G)$ à partir de φ en posant

$$\widehat{\varphi}(e) = \varphi(e), \forall e \in E, e \neq a. \quad (2.12)$$

De cette façon, le flux sur tout arc de G différent de a est non nul. Ensuite, on détermine le flux $\widehat{\varphi}(a)$ sur l'arc a .

Posons xy comme étant le sommet de G''_a résultant de la contraction dans G de l'arc $a = (x, y)$. Puisque $\varphi \in \Phi^*(G''_a)$ est un flot, on doit avoir

$$\varphi^-(xy) = \varphi^+(xy). \quad (2.13)$$

L'expression (2.13) nous permet de déduire que

$$\sum_{\{e \in E, e \neq a | \alpha(e)=x\}} \widehat{\varphi}(e) + \sum_{\{e \in E | \alpha(e)=y\}} \widehat{\varphi}(e) = \sum_{\{e \in E | \beta(e)=x\}} \widehat{\varphi}(e) + \sum_{\{e \in E, e \neq a | \beta(e)=y\}} \widehat{\varphi}(e). \quad (2.14)$$

Or, on constate que $\sum_{\{e \in E | \alpha(e)=y\}} \widehat{\varphi}(e) = \widehat{\varphi}^+(y)$ et $\sum_{\{e \in E | \beta(e)=x\}} \widehat{\varphi}(e) = \widehat{\varphi}^-(x)$, de sorte que (2.14) se réexprime comme

$$\widehat{\varphi}^+(y) - \sum_{\{e \in E, e \neq a | \beta(e)=y\}} \widehat{\varphi}(e) = \widehat{\varphi}^-(x) - \sum_{\{e \in E, e \neq a | \alpha(e)=x\}} \widehat{\varphi}(e). \quad (2.15)$$

Or, on doit avoir $\widehat{\varphi}^+(y) = \widehat{\varphi}^-(y)$, de sorte que

$$\widehat{\varphi}^+(y) = \widehat{\varphi}^-(y) = \widehat{\varphi}(a) + \sum_{\{e \in E, e \neq a | \beta(e)=y\}} \widehat{\varphi}(e). \quad (2.16)$$

En utilisant (2.16), on obtient

$$\widehat{\varphi}(a) = \widehat{\varphi}^+(y) - \sum_{\{e \in E, e \neq a | \beta(e)=y\}} \widehat{\varphi}(e). \quad (2.17)$$

De même, on doit avoir $\widehat{\varphi}^+(x) = \widehat{\varphi}^-(x)$, de sorte que

$$\widehat{\varphi}(a) = \widehat{\varphi}^-(x) - \sum_{\{e \in E, e \neq a | \alpha(e)=x\}} \widehat{\varphi}(e). \quad (2.18)$$

On remarque que l'expression (2.11) de $\widehat{\varphi}(a)$ existe, et ce par la construction de $\widehat{\varphi}$ qui fait que $\widehat{\varphi}^+(y) = \widehat{\varphi}^-(y)$ et $\widehat{\varphi}^+(x) = \widehat{\varphi}^-(x)$. De plus, elle est unique par (2.17). On note aussi que $\widehat{\varphi}(a)$ ne dépend que de φ , par la construction (2.12) de $\widehat{\varphi}$. Finalement, la correspondance établie entre φ et $\widehat{\varphi}$ est bijective. ■

Remarque 92 On remarque qu'il est possible que $\widehat{\varphi}(a) = 0$.

Remarque 93 On a

$$\widehat{\Phi}_a(G) = \widehat{\Phi}_a(G) |_{\varphi(a)=0} + \widehat{\Phi}_a(G) |_{\varphi(a) \neq 0}. \quad (2.19)$$

De plus, on a des bijections évidentes

$$\widehat{\Phi}_a(G) |_{\varphi(a)=0} \xrightarrow{\sim} \Phi^*(G'_a) \quad (2.20)$$

et

$$\widehat{\Phi}_a(G) |_{\varphi(a) \neq 0} \xrightarrow{\sim} \Phi^*(G), \quad (2.21)$$

ce qui entraîne

$$N^*(G''_a) = N^*(G'_a) + N^*(G). \quad (2.22)$$

Considérons maintenant la proposition suivante:

Proposition 94 Soit $\lambda \geq 1$ un entier. Le nombre de flots à flux non nuls $N^*(G; \lambda)$ satisfait les trois conditions suivantes:

(i) Si G est le graphe vide, alors

$$N^*(G; \lambda) = 1. \quad (2.23)$$

(ii) Si $G = (V, E, \alpha, \beta)$ est un graphe résultant de l'union de deux sous-graphes H et K dont l'intersection consiste en au plus un sommet, alors

$$N^*(G; \lambda) = N^*(H; \lambda) \cdot N^*(K; \lambda). \quad (2.24)$$

(iii) Si $G = (V, E, \alpha, \beta)$ est un graphe et si a est un lien (un arc qui n'est pas une boucle) de G , alors

$$N^*(G; \lambda) = N^*(G''_a; \lambda) - N^*(G'_a; \lambda). \quad (2.25)$$

Preuve

(i) Il n'y a qu'un seul flot sur le graphe nul, à savoir le vecteur vide, de longueur 0.

(ii) On traite les deux cas séparément.

(a) Si l'intersection de H et K est vide, alors un λ -flot sur G consiste en un choix indépendant d'un λ -flot sur H et d'un λ -flot sur K , de sorte que $N^*(H; \lambda) \cdot N^*(K; \lambda)$ dénombre tous les λ -flots sur G , et la relation (2.24) suit.

(b) Supposons que l'intersection de H et K consiste en exactement un sommet, notons-le v_0 . Considérons φ un λ -flot sur G . Soit $U = V(H) - \{v_0\} \subseteq V$ l'ensemble des sommets de H privé du sommet v_0 . Par le résultat de la proposition 85 (i) et (ii), le principe de conservation de la matière est satisfait pour l'ensemble U , de sorte que $\langle w(U), \varphi \rangle = 0$. Cela signifie que le flux entrant dans U est égal au flux sortant de U , c'est-à-dire que $\phi^-(U) = \phi^+(U)$. On remarque ensuite que le flux qui entre dans U (respectivement qui sort de U) provient uniquement d'arcs ayant pour source le sommet v_0 (respectivement ayant pour but le sommet v_0). Donc le flot φ qui circule sur le graphe G circule sur le sous-graphe H de manière indépendante du sous-graphe K . Le même raisonnement s'applique en considérant l'ensemble

$U' = V(K) - \{v_0\} \subseteq V$, de sorte que le flot φ qui circule sur le graphe G circule sur le sous-graphe K de manière indépendante du sous-graphe H .

On en conclut qu'un λ -flot sur G est construit indépendamment en un λ -flot sur H et un λ -flot sur K . Évidemment, la réciproque est vraie. On a donc que $N^*(G; \lambda) = N^*(H; \lambda) \cdot N^*(K; \lambda)$. La relation (2.24) suit.

(iii) Veuillez vous référer à la remarque 93.

■

On remarque que la proposition 94 permet de déduire facilement que pour tout graphe $G = (V, E, \alpha, \beta)$, l'expression

$$(-1)^{|E|-|V|} N^*(G; \lambda) \quad (2.26)$$

est une V-fonction.

Proposition 95 *Soit $\lambda \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$ et soit $G_m = (\{x_0\}, E)$ le graphe formé de l'unique sommet x_0 et d'un bouquet de m boucles. Pour tout $m \in \mathbb{N}$,*

$$(-1)^{|E|-1} N^*(G_m; \lambda) = Q(G_m; -1, -\lambda). \quad (2.27)$$

Preuve Soit $m \in \mathbb{N}$ et soit $E = \{1, 2, \dots, m\}$ les m boucles de G . Tout d'abord, on procède à l'évaluation du nombre de flots à flux non nuls $N^*(G_m; \lambda)$. Soit $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$ un λ -flot à flux non nuls sur G_m . Puisque chaque boucle induit sur x_0 un arc entrant et un arc sortant, chaque boucle peut faire circuler un flux indépendant des autres boucles, à savoir que pour toute boucle $i \in E$, $1 \leq \varphi_i \leq \lambda - 1$. Il y a donc un choix de $(\lambda - 1)$ valeurs pour chaque boucle, de sorte que $N^*(G_m; \lambda) = (\lambda - 1)^m$. Pour $m \in \mathbb{N}$, on a donc

$$\begin{aligned} (-1)^{|E|-1} N^*(G_m; \lambda) &= (-1)^{m-1} (\lambda - 1)^m \\ &= -(1 - \lambda)^m. \end{aligned}$$

Ensuite, on évalue $Q(G_m; -1, -\lambda)$. On a

$$\begin{aligned} Q(G_m; -1, -\lambda) &= \sum_{S \subseteq E(G)} (-1)^{p_0(G_m|_S)} \cdot (-\lambda)^{p_1(G_m|_S)} \\ &= - \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-\lambda)^k \\ &= -(1 - \lambda)^m. \end{aligned}$$

On a bien le résultat souhaité. ■

Proposition 96 *Soit $G = (V, E, \alpha, \beta)$ un multigraphe orienté. Le polynôme de flot de G est donné par*

$$N^*(G; \lambda) = (-1)^{|E|-|V|} Q(G; -1, -\lambda). \quad (2.28)$$

Preuve Ce résultat découle directement du fait que pour tout graphe $G = (V, E, \alpha, \beta)$, les fonctions $(-1)^{|E|-|V|} N^*(G; \lambda)$ et $Q(G; -1, -\lambda)$ sont des V -fonctions et que par la proposition 95, elles prennent les mêmes valeurs sur les graphes G_m , $m \in \mathbb{N}$. On conclut en utilisant la proposition 31 sur l'unicité des V -fonctions. ■

Corollaire 97 *Soit $G = (V, E, \alpha, \beta)$ un multigraphe orienté. Le polynôme de flot de G est donné par*

$$N^*(G; \lambda) = (-1)^{p_1(G)} \chi(G; 0, 1 - \lambda), \quad (2.29)$$

où $p_1(G) = |E| - |V| + p_0(G)$ est le nombre cyclomatique de G .

Preuve Tout d'abord, on remarque par (1.33) que

$$Q(G; x - 1, y - 1) = (x - 1)^{p_0(G)} \chi(G; x, y).$$

On fait la substitution dans (2.28) et on obtient

$$N^*(G; \lambda) = (-1)^{|E|-|V|+p_0(G)} \chi(G; 0, 1 - \lambda),$$

ce qui est bien le résultat souhaité. ■

Remarque 98 Tel qu'attendu, le nombre de λ -flots à flux non nuls sur un multigraphe orienté ne dépend pas de l'orientation choisie, comme en témoigne la formule (2.29).

2.1.3 Le polynôme de fiabilité

Dans cette section, nous considérons des graphes sans boucle ni arête multiple.

Définition 99 Soit $G = (V, E)$ un graphe. On dit d'une arête $e \in E$ qu'elle est *autorisée* si elle est permise dans G . Autrement, on dit qu'elle est *interdite*. Le sous-graphe de G dont on ne considère que les arêtes autorisées est appelé le *graphe résiduel* de G .

Définition 100 Soit $p \in [0, 1]$ et soit $G = (V, E)$ un graphe connexe dont chaque arête est indépendamment autorisée avec une probabilité p et interdite avec une probabilité $(1 - p)$. Le *polynôme de fiabilité* de G (*all terminal reliability* en anglais), noté $R(G, p)$, est la probabilité que le graphe résiduel de G soit connexe. Il est donné par la formule

$$R(G, p) = \sum_{\substack{S \subseteq E \\ G|_S \text{ est connexe}}} p^{|S|} (1 - p)^{|E| - |S|}, \quad (2.30)$$

où la somme est prise sur tous les sous-graphes connexes $G|_S = (V, S)$ de G .

Il est facile de constater que pour tout graphe connexe $G = (V, E)$, $R(G, p)$ est un polynôme bien défini en la variable p .

Proposition 101 Soit $p \in [0, 1]$. Le polynôme de fiabilité satisfait les deux propriétés suivantes:

- (i) Si $G = (V, E)$ est un graphe connexe et si $a \in E$ est une arête de G qui n'est ni une boucle ni un isthme, alors

$$R(G, p) = (1 - p)R(G'_a, p) + pR(G''_a, p). \quad (2.31)$$

- (ii) Soit $G \cup K$ le graphe connexe issu de l'union des graphes connexes G et K dont l'intersection consiste en exactement un sommet et aucune arête. Alors

$$R(G \cup K, p) = R(G, p) \cdot R(K, p). \quad (2.32)$$

Preuve

- (i) Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe et soit $a \in E$ une arête de G qui n'est ni une boucle ni un isthme. Le fait de supprimer l'arête $a \in E$ du graphe G est équivalent au fait de rendre l'arête $a \in E$ interdite dans le graphe résiduel de G . De plus, le fait de contracter l'arête $a \in E$ du graphe G est équivalent au fait de rendre l'arête $a \in E$ autorisée dans le graphe résiduel de G . On a donc

$$R(G, p) = (1 - p)R(G'_a, p) + pR(G''_a, p).$$

- (ii) Soit $G \cup K$ un graphe connexe comme dans l'hypothèse. Il est évident que la probabilité qu'un graphe résiduel de $G \cup K$ soit connexe consiste en les probabilités indépendantes que les graphes résiduels de G et K soient eux-mêmes connexes.

■

Proposition 102 *Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. Le polynôme de fiabilité de G est donné par*

$$R(G, p) = p^{r(G)}(1 - p)^{|E| - r(G)} \chi \left(G; 1, \frac{1}{1 - p} \right). \quad (2.33)$$

Preuve La preuve se fait par calcul direct. Remarquons tout d'abord que

$$\begin{aligned} \chi \left(G; 1, \frac{1}{1 - p} \right) &= \left(\sum_{S \subseteq E} 0^{p_0(G|_S) - p_0(G)} \left(\frac{p}{1 - p} \right)^{p_1(G|_S)} \right) \\ &= \left(\sum_{\substack{S \subseteq E \\ G|_S \text{ est connexe}}} \left(\frac{p}{1 - p} \right)^{|S| - |V| + 1} \right). \end{aligned}$$

On a donc que

$$\begin{aligned}
 p^{r(G)}(1-p)^{|E|-r(G)}\chi\left(G;1,\frac{1}{1-p}\right) &= p^{|V|-1}(1-p)^{|E|-|V|+1} \cdot \\
 &\quad \left(\sum_{\substack{S \subseteq E \\ G|_S \text{ est connexe}}} \left(\frac{p}{1-p}\right)^{|S|-|V|+1} \right) \\
 &= \sum_{\substack{S \subseteq E \\ G|_S \text{ est connexe}}} p^{|S|} (1-p)^{|E|-|S|} \\
 &= R(G, p).
 \end{aligned}$$

■

2.2 Le polynôme de Tutte et la mécanique statistique

2.2.1 Le modèle de Potts

Dans cette section, nous considérons des graphes simples, c'est-à-dire des graphes sans boucle ni arête multiple. Tout graphe simple G se définit par la donnée d'un triplet $G = (V, E, I)$, où V est un ensemble de sommets, E est un ensemble d'arêtes et $I : E \longrightarrow \mathcal{P}_2(V)$, la fonction d'incidence, est injective. Par exemple, une arête $e \in E$ donne $I(e) = \{i, j\}$, avec $i, j \in V$. On peut donc supposer que $E \subseteq \mathcal{P}_2(V)$.

Définition 103 Soit un entier $q \geq 1$ et soit $G = (V, E, I)$ un réseau (un graphe) constitué de n sommets. Une *configuration* σ est une fonction $\sigma : V \longrightarrow \{1, 2, \dots, q\}$ qui détermine l'état de chacun des n sommets du graphe. On note la configuration par $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$. Les q états possibles peuvent désigner des «spins», des types de métaux, etc.

Définition 104 Soit $q < \infty$ un entier positif. Soit $G = (V, E, I)$ un réseau (un graphe) constitué de n sommets. Un *modèle de Potts à q états* sur un réseau G est la donnée d'énergies d'interactions $J_{ij} \in \mathbb{R}$, $\forall \{i, j\} \in E$.

Définition 105 Soit $G = (V, E, I)$ un réseau (un graphe) constitué de n sommets et soit un modèle de Potts défini sur G . On définit l'*hamiltonien* d'une configuration σ

par

$$H(\sigma) = - \sum_{\{i,j\} \in E(G)} J_{ij} \delta(\sigma_i, \sigma_j), \quad (2.34)$$

où δ représente le delta de Kroneker, c'est-à-dire que

$$\delta(\sigma_i, \sigma_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma_i = \sigma_j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$H(\sigma)$ représente l'énergie de l'état σ .

Définition 106 La fonction de partition $Z(G)$ d'un modèle de Potts sur un graphe G est définie par

$$Z(G) = \sum_{\sigma} \exp(-\beta H(\sigma)) \quad (2.35)$$

où la somme est prise sur toutes les configurations possibles σ , $\beta = \frac{1}{kT}$ est un paramètre déterminé par la température T en degrés Kelvin et par la constante de Boltzmann k .

L'objectif visé est de développer une expression pour la fonction de partition Z qui soit plus près de la théorie des graphes. Par exemple, on veut une expression de Z qui fait intervenir les sous-ensembles d'arêtes du graphe G .

Proposition 107 Soit $(G, \{J_{ij}\}_{\{i,j\} \in E(G)})$ un modèle de Potts à q états et soit $Z(G)$ sa fonction de partition. Alors on a

$$Z(G; q, \nu) = \sum_{S \subseteq E(G)} q^{p_0(G|S)} \prod_{\{i,j\} \in S} \nu_{ij}, \quad (2.36)$$

où les ν_{ij} sont définis par $\nu_{ij} = \exp(\beta J_{ij}) - 1$. Si de plus, $\nu_{ij} = \nu, \forall \{i, j\} \in E$, alors on a

$$Z(G) = Z(G; q, \nu) = \sum_{S \subseteq E(G)} q^{p_0(G|S)} \nu^{|S|}. \quad (2.37)$$

Preuve Par la définition de Z , on a

$$\begin{aligned}
Z(G; q, \nu) &= \sum_{\sigma} \exp(-\beta H(\sigma)) \\
&= \sum_{\sigma} \exp \left(-\beta \left(- \sum_{\{i,j\} \in E(G)} J_{ij} \delta(\sigma_i, \sigma_j) \right) \right) \\
&= \sum_{\sigma} \exp \left(\sum_{\{i,j\} \in E(G)} \beta J_{ij} \delta(\sigma_i, \sigma_j) \right) \\
&= \sum_{\sigma} \prod_{\{i,j\} \in E(G)} \exp(\beta J_{ij} \delta(\sigma_i, \sigma_j)). \tag{2.38}
\end{aligned}$$

Suivant l'idée de Mayer, nous allons poser que

$$\exp(\beta J_{ij}) = (1 + \nu_{ij}), \tag{2.39}$$

où ν_{ij} est une variable formelle. Étudions la fonction $\exp(\beta J_{ij} \delta(\sigma_i, \sigma_j))$:

$$\exp(\beta J_{ij} \delta(\sigma_i, \sigma_j)) = \begin{cases} (1 + \nu_{ij}) & \text{si } \sigma_i = \sigma_j, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a donc $\exp(\beta J_{ij} \delta(\sigma_i, \sigma_j)) = 1 + \nu_{ij} \delta(\sigma_i, \sigma_j)$. Reprenant l'expression (2.38), on obtient

$$\begin{aligned}
Z(G; q, \nu) &= \sum_{\sigma} \prod_{I(e)=\{i,j\} \in E(G)} (1 + \nu_{ij} \delta(\sigma_i, \sigma_j)) \\
&= \sum_{\sigma} \left\{ \sum_{S \subseteq E(G)} \prod_{\{i,j\} \in S} \nu_{ij} \delta(\sigma_i, \sigma_j) \right\}. \tag{2.40}
\end{aligned}$$

On observe que les seuls termes qui contribuent à la somme $\sum_{S \subseteq E(G)}$ sont ceux pour lesquels $(\sigma_i = \sigma_j), \forall \{i, j\} \in S$. Ainsi, parmi toutes les configurations σ possibles pour un $S \subseteq E(G)$ donné, seulement un nombre $q^{p_0(G|_S)}$ respectent cette condition. En effet, il faut nécessairement que dans une composante connexe de $(G|_S)$, tous les sommets aient le même état σ_i . Comme il y a $p_0(G|_S)$ composantes connexes dans $(G|_S)$, on conclut que $q^{p_0(G|_S)}$ états satisfont la condition $(\sigma_i = \sigma_j), \forall \{i, j\} \in S$.

En reprenant l'expression (2.40), on obtient

$$Z(G; q, \nu) = \sum_{S \subseteq E(G)} q^{p_0(G|_S)} \prod_{(i,j) \in S} \nu_{ij}. \tag{2.41}$$

Si $\nu_{ij} = \nu$, $\forall \{i, j\} \in E(G)$ dans l'expression (2.41), on obtient

$$Z(G; q, \nu) = \sum_{S \subseteq E(G)} q^{p_0(G|_S)} \nu^{|S|}.$$

■

2.2.2 Le polynôme de Tutte et le modèle de Potts

Le polynôme de Tutte peut se spécialiser en la fonction de partition du modèle de Potts. Avant de présenter ce résultat, nous allons d'abord établir l'équivalence entre la fonction de partition et la fonction Q introduite au chapitre 1.

Proposition 108 *Soit $G = (V, E, I)$ un graphe et soit $Z(G)$ la fonction de partition du modèle de Potts développée sur ce graphe. Alors*

$$Z(G; q, \nu) = \nu^{|V|} Q(G; \frac{q}{\nu}, \nu) \quad (2.42)$$

Preuve Soit Z la fonction de partition du modèle de Potts telle que présentée dans la proposition précédente, à savoir que

$$Z(G; q, \nu) = \sum_{S \subseteq E(G)} q^{p_0(G|_S)} \nu^{|S|}.$$

En développant cette expression et en remarquant que $|V(G|_S)| = |V|$, nous obtenons le résultat désiré. En effet,

$$\begin{aligned} Z(G; q, \nu) &= \nu^{|V|} \sum_{S \subseteq E(G)} \left(\frac{q}{\nu} \right)^{p_0(G|_S)} \nu^{|S| - |V(G|_S)| + p_0(G|_S)} \\ &= \nu^{|V|} Q(G; \frac{q}{\nu}, \nu). \end{aligned}$$

■

Nous sommes maintenant prêts à établir l'équivalence entre le polynôme de Tutte et la fonction de partition du modèle de Potts, dans le cas où toutes les énergies d'interaction sont égales.

Corollaire 109 Soit $G = (V, E, I)$ un graphe et soit $Z(G)$ la fonction de partition du modèle de Potts développée sur ce graphe, en considérant que toutes les énergies d'interactions J_{ij} sont égales. Alors

$$Z(G; q, \nu) = q^{p_0(G)} \nu^{|V| - p_0(G)} \chi(G; \frac{q + \nu}{\nu}, \nu + 1). \quad (2.43)$$

Preuve Par la proposition précédente, on a

$$\begin{aligned} Z(G; q, \nu) &= \nu^{|V|} Q(G; \frac{q}{\nu}, \nu) \\ &= q^{p_0(G)} \nu^{|V| - p_0(G)} \left(\frac{\nu}{q}\right)^{p_0(G)} Q(G; \frac{q}{\nu}, \nu) \\ &= q^{p_0(G)} \nu^{|V| - p_0(G)} \left(\frac{q + \nu}{\nu} - 1\right)^{-p_0(G)} Q(G; \frac{q + \nu}{\nu} - 1, \nu) \\ &= q^{p_0(G)} \nu^{|V| - p_0(G)} \chi(G; \frac{q + \nu}{\nu}, \nu + 1). \end{aligned}$$

■

Cette proposition révèle un fait intéressant à propos du lien qui unit le polynôme de Tutte χ et la fonction de partition Z . En effet, pour obtenir la fonction de partition $Z(G; q, \nu)$ du modèle de Potts à partir du polynôme de Tutte, il faut l'évaluer en les valeurs $x = \frac{q + \nu}{\nu}$ et $y = \nu + 1$. Lorsqu'on fait le produit $(x - 1)(y - 1)$, on obtient $(x - 1)(y - 1) = \left(\frac{q + \nu}{\nu} - 1\right)(\nu + 1 - 1) = q$

Il s'avère que le polynôme de Tutte, lorsqu'il est évalué le long de l'hyperbole décrite par

$$H_q = \{(x, y) \mid (x - 1)(y - 1) = q\},$$

se spécialise en la fonction de partition du modèle de Potts à q -états. Il suffit ensuite, en considérant l'expression (2.43), de corriger par le produit $q^{p_0(G)} \nu^{|V| - p_0(G)}$.

CHAPITRE III

LE POLYNÔME DE TUTTE ET LA THÉORIE DES NOEUDS

Tout comme en théorie des graphes et en physique de la mécanique statistique, le polynôme de Tutte trouve une spécialisation dans la théorie des noeuds. La théorie des noeuds est un domaine de recherche très actif des mathématiques. Notamment, un des problèmes fondamentaux consiste à pouvoir déterminer si deux noeuds sont équivalents ou non. Pour tenter de répondre à cette question, les mathématiciens développent des invariants de noeuds, c'est-à-dire des polynômes qui caractérisent les noeuds. Nous allons voir que l'un de ces invariants, le polynôme de Jones, se trouve à être, pour un type particulier de noeud, une spécialisation du polynôme de Tutte.

Tout d'abord, la section qui suit présente les définitions et résultats de base nécessaires à la compréhension du polynôme de Jones. Ensuite, la deuxième section présente le polynôme de Jones. Finalement, la dernière section établit le lien entre le polynôme de Jones et le polynôme de Tutte.

3.1 Introduction à la théorie des noeuds

Définition 110 Soient X et Y deux espaces topologiques de Hausdorff (ou séparés). Une fonction $f : X \hookrightarrow Y$ est appelée un *plongement* si $f : X \longrightarrow f(X)$ est un homéomorphisme, c'est-à-dire une fonction bijective telle que f et f^{-1} soient continues.

Définition 111 Un *noeud* est l'image d'un plongement $f : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, où S^1 est le cercle de dimension un. Autrement dit, un noeud est un sous-ensemble de \mathbb{R}^3 qui est

homéomorphe à un cercle.

Définition 112 Un *entrelacs* à k composantes est l'image d'un plongement $l : S^1 \sqcup S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ de k copies disjointes du cercle dans \mathbb{R}^3 , c'est-à-dire qu'un entrelacs est un sous-ensemble de \mathbb{R}^3 qui est homéomorphe à l'union disjointe de k cercles.

Remarque 113 On peut remplacer \mathbb{R}^3 par S^3 , la 3-sphère, dans les définitions de noeud et d'entrelacs.

Remarque 114 Un noeud est un entrelacs pour $k = 1$.

Définition 115 Soit X un espace topologique. Une *isotopie* d'un espace topologique est une application continue $H : X \times [0, 1] \longrightarrow X$ telle que

$$(i) \ h_0 = H(\cdot, 0) = 1_X$$

$$(ii) \ \forall t \in [0, 1], \text{ l'application partielle } h_t = H(\cdot, t) \text{ est un homéomorphisme.}$$

Définition 116 Soient K et L deux entrelacs. On dit que K et L sont *équivalents* s'il existe une application continue $H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que

$$(i) \ h_0 = H(\cdot, 0) = 1_{\mathbb{R}^3}$$

$$(ii) \ \text{Pour tout } t \in [0, 1], \text{ l'application partielle } h_t = H(\cdot, t) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ est un homéomorphisme.}$$

$$(iii) \ h_1 \circ K = L, \text{ où } h_1 = H(\cdot, 1).$$

On dit alors qu'il existe une *isotopie ambiante* entre K et L .

Définition 117 Un *graphe plan* est un graphe muni d'un plongement sur le plan ou la sphère.

Définition 118 Un *univers* est un graphe plan dont tous les sommets sont de degré 4.

Remarque 119 Un univers peut contenir des boucles et des arêtes multiples.

Définition 120 Soit $G = (V, E, I)$, avec $I : E \longrightarrow \mathcal{P}_1(V) \cup \mathcal{P}_2(V)$, un graphe plan (qui peut contenir des arêtes multiples et des boucles). L'*univers médian* de G , noté $U(G)$, est l'univers obtenu de G en appliquant la méthode suivante:

1. Chaque arête $e \in E$ (incluant les boucles) telle que $I(e) = \{i, j\}$ est marquée en son centre d'un croisement qui a la forme de la lettre majuscule X. Chacune des «pattes» de ce croisement, au nombre de quatre, reçoit l'étiquette du sommet incident le plus proche, comme dans la figure 3.1.

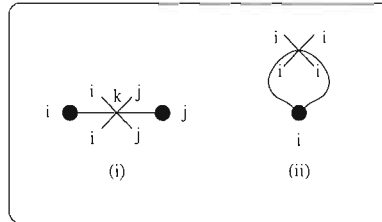


Figure 3.1 (i) Un lien et (ii) une boucle marqués d'un croisement

2. On relie par un trait deux «pattes» si elles satisfont les deux conditions suivantes:
 - (a) elles possèdent la même étiquette;
 - (b) elles sont associées à deux arêtes voisines (possiblement la même arête) d'une même face (possiblement la face infinie).
3. On supprime les sommets et les arêtes de G , tout en conservant l'étiquette des sommets supprimés. On obtient ainsi l'univers médian $U(G)$, où les sommets sont étiquetés par E et les faces par V .

Remarque 121 L'univers médian $U(G)$ obtenu de G est effectivement un univers, puisque tous ses sommets sont nécessairement de degré quatre. De plus, il hérite de G son plongement sur le plan.

Remarque 122 Un univers médian peut posséder des boucles.

Remarque 123 Tout graphe plan produit un univers médian unique, par la construction présentée à la définition 120.

Remarque 124 Un graphe plan connexe produit un univers médian connexe, alors qu'un graphe plan non connexe produit un univers médian non connexe.

Les exemples 125 et 126 qui suivent illustrent la définition 120, où à partir d'un graphe plan, on produit l'univers médian unique.

Exemple 125 Soit C_2 la chaîne munie d'une boucle apparaissant à la figure 3.2.

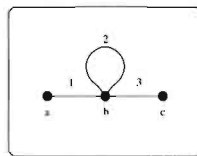


Figure 3.2 Le graphe C_2

La figure 3.3 montre l'application des étapes 1, 2 et 3 de la définition 120.

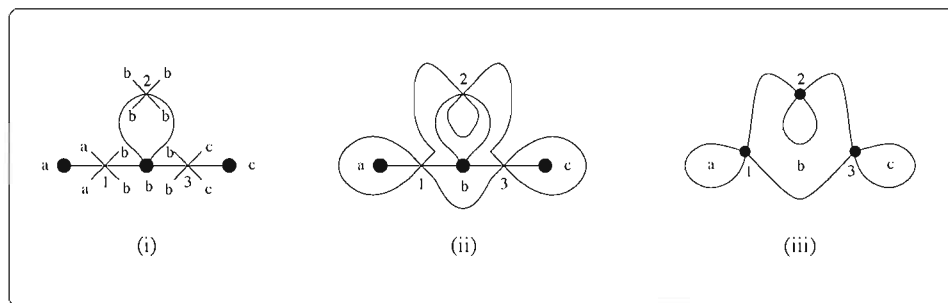


Figure 3.3 Application à C_2 de la construction de la définition 120

Ainsi, la figure 3.3 (i) montre le graphe C_2 dont les arêtes sont marquées d'un croisement. La figure 3.3 (ii) montre les «pattes» reliées deux à deux. La figure 3.3

(iii) montre l'univers médian $U(C_2)$ obtenu.

Exemple 126 Soit g_1 le graphe plan représenté à la figure 3.4.

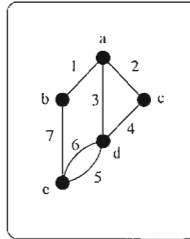


Figure 3.4 Le graphe g_1

Les différentes étapes pour obtenir l'univers médian $U(g_1)$ sont illustrées à la figure 3.5.

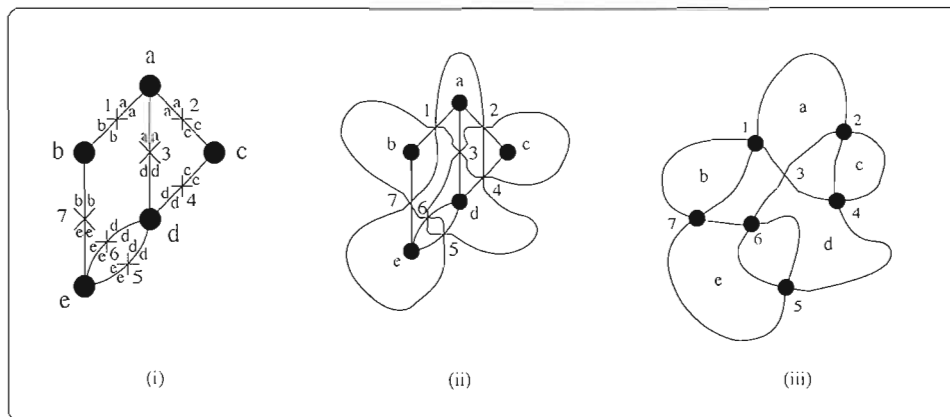


Figure 3.5 Pour obtenir $U(g_1)$ à partir de g_1

À la figure 3.5 (i), on applique l'étape 2 en ajoutant un croisement sur chaque arête de g_1 . À la figure 3.5 (ii), on relie les «pattes» selon les règles établies à l'étape 3. On applique ensuite l'étape 4 pour obtenir l'univers médian $U(g_1)$ représenté à la figure 3.5 (iii).

Inversement, il est possible de construire un graphe plan à partir d'un univers. On appelle un tel graphe le graphe médian.

Définition 127 Soit U un univers. Le *graphe médian* $g(U)$ est obtenu de U par la méthode suivante:

1. On procède au coloriage de Tait (unique!) de l'univers U , c'est-à-dire que:
 - (i) On colorie la face infinie de l'univers U en blanc.
 - (ii) On colorie récursivement en blanc chaque face qui partage un croisement avec l'une des faces blanches déjà coloriées.
 - (iii) On colorie les faces restantes en noir et on les étiquette (seulement les faces noires).
2. Les *sommets* du graphe médian $g(U)$ sont les faces noires de U . Les *arêtes* du graphe médian $g(U)$ sont choisies comme suit: deux sommets de $g(U)$ sont liés par une arête si et seulement si les faces noires qui leur correspondent partagent un croisement.

Remarque 128 Tout univers produit un graphe médian unique, par la construction de la définition 127.

Remarque 129 Les constructions présentées aux définitions 120 et 127 sont inverses l'une de l'autre (à l'étiquetage près).

Remarque 130 À l'étape 1 de la définition 127, il est possible d'effectuer le *coloriage de Tait dual* de l'univers, c'est-à-dire en coloriant en noir la face infinie. De cette façon, on obtient le *graphe médian dual* $g^*(U)$.

Remarque 131 Un univers connexe produit un graphe médian connexe, alors qu'un univers non connexe produit un graphe médian non connexe.

L'exemple qui suit illustre la définition 127, où à partir d'un univers, on produit un graphe médian unique.

Exemple 132 Soit $U(g_1)$ l'univers de l'exemple 126 représenté à la figure 3.6 (i).

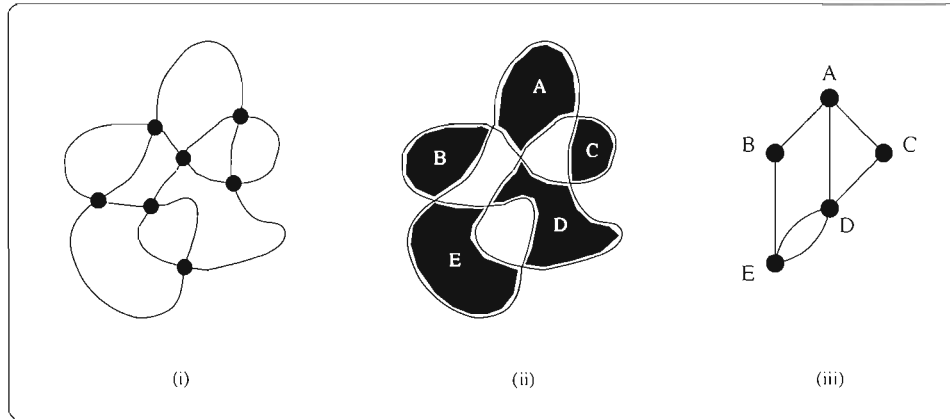


Figure 3.6 Pour obtenir $g(U(g_1))$ à partir de $U(g_1)$

On procède au coloriage de Tait de $U(g_1)$ et on étiquette les faces noires. Le résultat obtenu est l'univers bi-colorié de la figure 3.6 (ii). Ensuite, on construit le graphe médian en choisissant pour sommets les faces noires étiquetées, et on relie entre eux les sommets dont les faces partagent un croisement. Le résultat obtenu est le graphe médian $g(U(g_1))$ représenté à la figure 3.6 (iii).

Remarque 133 Comme attendu, le graphe g_1 de l'exemple 126 produit l'univers $U(g_1)$, et l'univers $U(g_1)$ de l'exemple 132 produit le graphe $g(U(g_1))$. Or, $g_1 \simeq g(U(g_1))$, comme le stipule la remarque 129.

La remarque 129 mène naturellement à la proposition qui suit.

Proposition 134 *L'ensemble des graphes plans est en bijection avec l'ensemble des univers.*

Preuve La bijection entre les deux ensembles est clairement définie par les constructions présentées aux définitions 120 et 127. ■

Habituellement, un entrelacs est représenté par un diagramme d'entrelacs en considérant un univers dans lequel on a ajouté de l'information additionnelle à chaque croisement. On appelle *univers ponts et chaussées* un univers auquel on a ajouté l'information additionnelle à chaque croisement, c'est-à-dire qu'on sait pour chaque croisement lequel des brins passe au-dessus et lequel passe en-dessous.

Définition 135 Soit l un entrelacs. Une *projection* continue $p : l \longrightarrow \Pi$ de l sur un plan Π est dite *régulière* si

1. Il y a seulement un nombre fini de points multiples (un point multiple P est un point pour lequel $|p^{-1}(P)| > 1$) et tous ces points multiples sont doubles (à savoir $|p^{-1}(P)| = 2, \forall P$ un point multiple);
2. Ces points doubles doivent correspondre à des croisements dans Π de brins de l'entrelacs l .

Définition 136 Un *diagramme* D d'entrelacs l est l'image d'une projection régulière $p : l \longrightarrow \Pi$ d'un entrelacs l sur un plan Π avec de l'information additionnelle à chaque croisement, c'est-à-dire que l'on conserve l'information pour chaque croisement sur quel brin passe au-dessus et quel brin passe en-dessous.

Remarque 137 On remarque qu'un diagramme d'entrelacs constitue un univers ponts et chaussées.

Remarque 138 On peut voir assez facilement que tout univers ponts et chaussées correspond bien à un diagramme d'entrelacs.

La figure 3.7 montre l'univers du noeud de trèfle ainsi que l'un des univers ponts et chaussées du trèfle, qui correspond bien à un diagramme du trèfle.

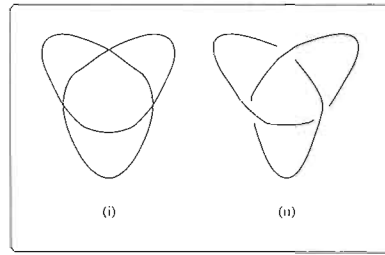


Figure 3.7 (i) Univers du trèfle (ii) Un univers ponts et chaussées du trèfle

L'équivalence entre deux entrelacs, telle que présentée à la définition 116, peut aussi s'établir directement à partir des diagrammes d'entrelacs par l'entremise des mouvements de Reidemeister.

Définition 139 Les *mouvements de Reidemeister* sont caractérisés par les trois types de mouvements bijectifs illustrés à la figure 3.8.

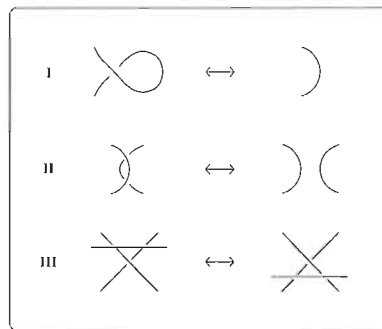


Figure 3.8 Les trois types de mouvement de Reidemeister

Définition 140 Deux diagrammes d'entrelacs sont dits *équivalents* si l'un peut s'obtenir de l'autre par une suite finie de mouvements de Reidemeister.

Proposition 141 Deux entrelacs K et L sont équivalents si et seulement si leurs diagrammes d'entrelacs respectifs sont équivalents.

Preuve Voir la preuve dans le livre de Burde et Zieschang (Burde et Zieschang,

1985). ■

Remarque 142 La proposition 141 nous permet de travailler avec les diagrammes d'entrelacs plutôt qu'avec les entrelacs eux-mêmes.

L'un des problèmes fondamentaux en théorie des noeuds consiste à pouvoir déterminer si deux entrelacs sont équivalents ou non. Pour ce faire, les mathématiciens développent des invariants d'entrelacs, c'est-à-dire des quantités qui sont invariantes sous isotopie ambiante, et donc invariantes sous les mouvements de Reidemeister. Ultimement, il faudrait pouvoir distinguer tous les types d'entrelacs possibles, et ainsi en permettre une classification. Mais avant de présenter l'un de ces invariants, le polynôme de Jones, on veut établir une correspondance entre un diagramme d'entrelacs et un graphe, dans le but d'appliquer sur un diagramme d'entrelacs les concepts de la théorie des graphes, notamment le polynôme de Tutte.

Définition 143 Un *graphe plan signé* est un graphe plan dont chaque arête est étiquetée d'un signe positif (+) ou d'un signe négatif (-).

Proposition 144 *L'ensemble des diagrammes d'entrelacs est en bijection avec l'ensemble des graphes plans signés. On note cette bijection par τ , à savoir*

$$\tau : \{\text{Graphes plans signés}\} \xrightarrow{\sim} \{\text{Diagrammes d'entrelacs}\} \quad (3.1)$$

Preuve On sait que l'ensemble des univers est en bijection avec l'ensemble des graphes plans (voir la proposition 134).

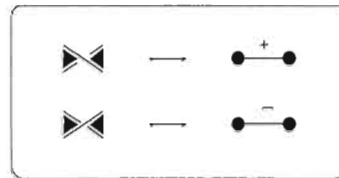


Figure 3.9 Bijection entre les croisements et les arêtes signées

On établit la bijection illustrée à la figure 3.9 entre les arêtes signées d'un graphe plan et l'information additionnelle ajoutée aux croisements d'un diagramme d'entrelacs. On remarque que le fait de balayer avec le brin du dessus la région noircie dans le sens anti-horaire correspond à une arête positive, alors que le fait de balayer avec le brin du dessus la région noircie dans le sens horaire correspond à une arête négative. L'ensemble des univers ponts et chaussées est donc en bijection avec l'ensemble des graphes plans signés. Puisque les univers ponts et chaussées sont des diagrammes d'entrelacs, le résultat (3.1) suit. ■

Définition 145 Un diagramme d'entrelacs est *alterné* si les croisements de chaque brin sont successivement «au-dessus» et «en-dessous».

Proposition 146 *Un diagramme d'entrelacs est alterné si et seulement si toutes les arêtes du graphe plan signé qui lui correspond ont le même signe.*

Preuve Voir dans le livre de Welsh (1993). ■

Définition 147 Soient L_1 et L_2 deux entrelacs. On appelle l'*union disjointe* de L_1 et L_2 l'opération qui consiste à les isotoper dans des 3-boules disjointes et à prendre leur union. On note $L_1 \sqcup L_2$ le résultat. Intuitivement, il s'agit de considérer l'entrelacs formé de L_1 et L_2 , sans qu'ils ne partagent aucun croisement.

Définition 148 Soient K_1 et K_2 deux noeuds. La *somme connexe* de K_1 et K_2 , notée $K_1 \# K_2$, est obtenue (intuitivement) de $K_1 \sqcup K_2$ en découpant une petite portion de K_1 et K_2 pour les relier ensemble, tout en ne formant pas de nouveau croisement. Voir la figure 3.10. Pour une définition plus précise, veuillez vous référer au livre de Lickorish (1997). On peut également définir la somme connexe de deux entrelacs. Pour cela, il faut spécifier les brins de l'un et l'autre entrelacs que l'on va relier ensemble.

3.2 Le polynôme de Jones

Le polynôme de Jones fut développé par Vaughan F.R. Jones dans les années 1980. Le travail de ce dernier inspira de nombreux mathématiciens, notamment Hoste,

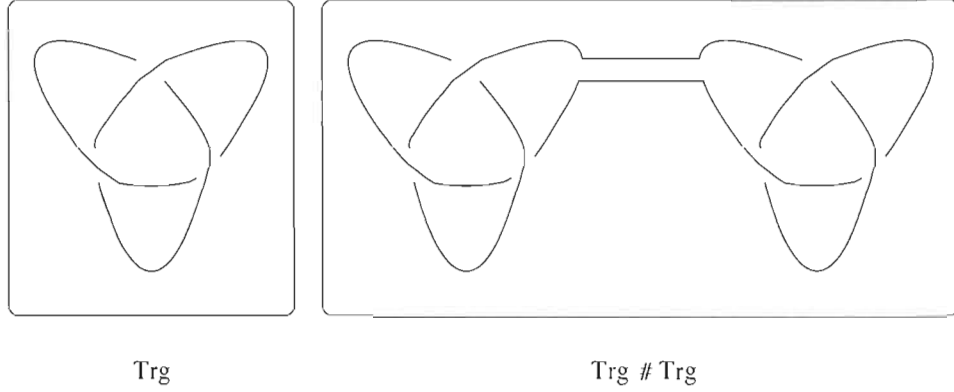


Figure 3.10 La somme connexe du noeud de trèfle gauche Trg avec lui-même

Oceanu, Millett, Freyd, Lickorish, Yetter, Przytycki et Traczyk, qui généralisèrent le polynôme de Jones en un polynôme nommé HOMFLY(PT) en leur honneur.

Le polynôme de Jones se définit de plusieurs façons. Nous retenons l'approche de L.H. Kauffman (1988), qui fait intervenir le polynôme crochet.

Définition 149 Le *polynôme crochet* $[\]$ est une fonction qui a pour domaine les diagrammes d'entrelacs et pour image $\mathbb{Z}[A^{-1}, A]$, c'est-à-dire les polynômes de Laurent à coefficients entiers en les variables A et A^{-1} . Il est défini récursivement par les trois relations suivantes: Si D est un diagramme d'entrelacs, alors

- (i) $[\bigcirc] = 1$, où \bigcirc est le diagramme du noeud trivial.
- (ii) $[D \sqcup \bigcirc] = (-A^{-2} - A^2) \cdot [D]$, où $D \sqcup \bigcirc$ consiste en l'union disjointe de D et du noeud trivial.
- (iii) Pour chaque croisement de D , on a

$$\left[\begin{array}{c} \text{Diagram with crossing } T \text{ and } T' \\ \text{Regions } S \text{ and } S' \end{array} \right] = A \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with crossing } T \text{ and } T' \\ \text{Regions } S = S' \end{array} \right] + A^{-1} \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with crossing } T \text{ and } T' \\ \text{Regions } S \text{ and } S' \end{array} \right]^{T \leftrightarrow T'} \quad (3.2)$$

où les trois schémas représentent le même diagramme d'entrelacs, mais qui diffère localement de la façon indiquée.

Remarque 150 Pour le croisement $\begin{array}{c} \tau \\ \diagup \quad \diagdown \\ s \quad s' \\ \diagdown \quad \diagup \\ \tau' \end{array}$ de la relation (3.2), le fait de balayer le brin du dessus dans le sens anti-horaire balaye les régions S et S' , ce qui correspond au fait d'associer la variable A au croisement dénoué $\begin{array}{c} \tau \\ \text{---} \\ s = s' \\ \text{---} \\ \tau' \end{array}$. À l'inverse, le fait de balayer le brin du dessus dans le sens horaire balaye les régions T et T' , ce qui correspond au fait d'associer la variable A^{-1} au croisement dénoué $\begin{array}{c} \tau = \tau' \\ \text{---} \\ s \end{array}$.

Le polynôme crochet d'un diagramme qui possède n croisements peut être calculé en l'exprimant comme une somme linéaire de 2^n diagrammes qui ne possèdent aucun croisement, en utilisant (iii), et en remarquant, par (i) et (ii), que n'importe quel diagramme qui consiste en c copies du noeud trivial possède $(-A^{-2} - A^2)^{c-1}$ comme polynôme crochet.

Il est facile de voir que l'ordre dans lequel la relation (iii) est appliquée sur les croisements n'importe pas sur la valeur du polynôme crochet. Il suffit de le vérifier pour deux croisements non adjacents et pour deux croisements adjacents. De fait, le polynôme crochet est bien défini pour les diagrammes d'entrelacs. Si le diagramme d'entrelacs vide est requis, on lui attribue le polynôme $(-A^{-2} - A^2)^{-1}$.

Proposition 151 *Soit L_1 et L_2 deux entrelacs. Le polynôme crochet de l'union disjointe $L_1 \sqcup L_2$ est*

$$[L_1 \sqcup L_2] = (-A^{-2} - A^2) \cdot [L_1] [L_2]. \quad (3.3)$$

Preuve Voir dans le livre de Lickorish (1997). ■

Proposition 152 *Soient L_1 et L_2 deux entrelacs. Le polynôme crochet de la somme connexe $L_1 \# L_2$ est*

$$[L_1 \# L_2] = [L_1] [L_2]. \quad (3.4)$$

Preuve Voir la preuve dans le livre de Lickorish (1997). ■

Lorsqu'on étudie sur le polynôme crochet $[D]$ l'effet des mouvements de Reidemeister sur le diagramme d'entrelacs D , on constate que le fait de modifier D par un

mouvement de Reidemeister de type II ou III laisse $[D]$ inchangé. Par contre, $[D]$ est modifié lorsque D subit un mouvement de Reidemeister de type I. Cela nous entraîne à améliorer le polynôme crochet en vue de le rendre invariant sous les trois types de mouvements de Reidemeister, pour qu'il devienne caractéristique des entrelacs équivalents.

Pour ce faire, on attribue une orientation aux diagrammes d'entrelacs et on introduit la notion de torsion.

Définition 153 Un diagramme d'entrelacs *orienté* est un diagramme d'entrelacs pour lequel chacun des brins est muni d'une orientation.

Définition 154 La *torsion* d'un diagramme d'entrelacs orienté D , notée $\rho(D)$ est la somme des valeurs attribuées à chaque croisement de D . Les valeurs en question sont définies par convention à la figure 3.11. On remarque que $\rho(D) \in \mathbb{Z}$, $\forall D$.

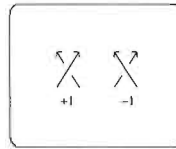


Figure 3.11 La valeur attribuée à chaque type de croisement

Remarque 155 La torsion, tout comme le polynôme crochet, est invariante sous les mouvements de Reidemeister de type II et III, mais varie sous le mouvement de Reidemeister de type I.

Définition 156 Soit D un diagramme d'entrelacs orienté. Le polynôme f_D est défini par

$$f_D(A) = (-A)^{-3\rho(D)} [D], \quad (3.5)$$

où $\rho(D)$ est la torsion de D . On remarque que l'on ne tient pas compte de l'orientation de D dans le calcul du polynôme crochet $[D]$.

Le polynôme f_D est un invariant d'entrelacs, c'est-à-dire que le fait de modifier un diagramme d'entrelacs orienté par un mouvement de Reidemeister de type I, II ou

III laisse le polynôme crochet de ce diagramme inchangé. Le polynôme de Jones peut être défini à partir de f_D .

Définition 157 Soit D un diagramme d'entrelacs orienté. Le *polynôme de Jones* V_D de D est un polynôme de Laurent en la variable $t^{1/4}$, à coefficients entiers, défini par

$$V_D(t) = f_D(A) \big|_{A=t^{-1/4}}, \quad (3.6)$$

c'est-à-dire que

$$V_D(t) = (-A)^{-3\rho(D)} [D] \big|_{A=t^{-1/4}}. \quad (3.7)$$

Noter que $\forall D, V_D \in \mathbb{Z} [t^{-1/4}, t^{1/4}]$.

Proposition 158 Le polynôme de Jones V est une fonction

$$V : \{\text{Entrelacs orientés dans } \mathbb{R}^3\} \longrightarrow \mathbb{Z} [t^{-1/2}, t^{1/2}]$$

telle que

$$(i) \quad V \bigcirc = 1,$$

$$(ii) \quad t^{-1} V \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} - t V \begin{array}{c} \searrow \\ \nearrow \end{array} + (t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}) V \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} = 0.$$

Preuve Pour plus de détails, voir le livre de Lickorish à la page 28 (1997). ■

Pour bien comprendre la définition des polynômes crochet et de Jones, les exemples 159 et 161 illustrent le calcul de ces polynômes pour le noeud de trèfle gauche.

Exemple 159 Soit Trg le diagramme du trèfle gauche illustré à la figure 3.12.

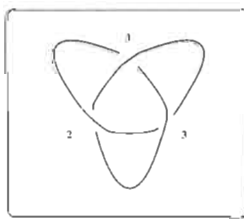
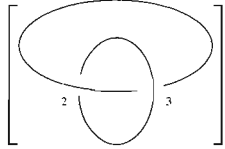
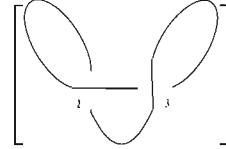
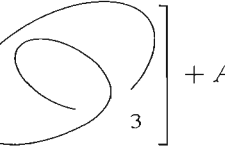
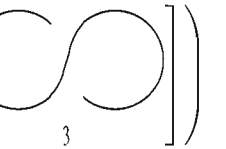
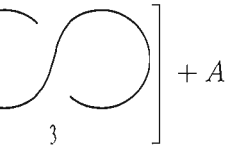
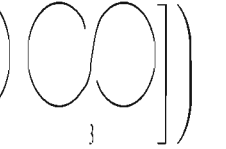
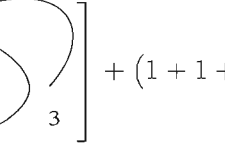
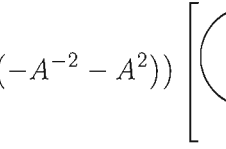


Figure 3.12 Le diagramme Trg du trèfle gauche



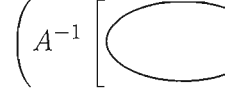

Le calcul du polynôme crochet de Trg se fait récursivement en dénouant un par un ses croisements. On fait le choix arbitraire de débiter avec le croisement 1 et on obtient, en appliquant la relation (3.2):

$$[\text{Trg}] = A^{-1} \left[\text{Diagram 1} \right] + A \left[\text{Diagram 2} \right]$$



On choisit ensuite de dénouer le croisement 2 et on obtient

$$\begin{aligned} [\text{Trg}] &= A^{-1} \left(A^{-1} \left[\text{Diagram 3} \right] + A \left[\text{Diagram 4} \right] \right) \\ &\quad + A \left(A^{-1} \left[\text{Diagram 5} \right] + A \left[\text{Diagram 6} \right] \right) \\ &= A^{-2} \left[\text{Diagram 7} \right] + (1 + 1 + A^2(-A^{-2} - A^2)) \left[\text{Diagram 8} \right] \end{aligned}$$







Il ne reste plus que le croisement 3 à dénouer pour obtenir

$$\begin{aligned} [\text{Trg}] &= A^{-2} \left(A^{-1} \left[\text{Diagram 9} \right] + A \left[\text{Diagram 10} \right] \right) \\ &\quad + (1 - A^4) \left(A^{-1} \left[\text{Diagram 11} \right] + A \left[\text{Diagram 12} \right] \right) \\ &= A^{-3}(-A^{-2} - A^2) + A^{-1} + (1 - A^4)(A^{-1} + A(-A^{-2} - A^2)) \\ &= -A^{-5} - A^{-1} + A^{-1} + A^{-1} - A^{-1} - A^3 - A^3 + A^3 + A^7. \end{aligned}$$





On a donc

$$[\text{Trg}] = -A^{-5} - A^3 + A^7. \quad (3.8)$$

Remarque 160 Dans l'exemple 159, on a fait le calcul du polynôme crochet du trèfle gauche Trg. Le diagramme du trèfle droit, noté Trd, s'obtient de Trg en inversant les brins pour chacun des croisements. Le polynôme crochet du trèfle droit Trd est

$$[\text{Trd}] = A^{-7} - A^{-3} - A^5. \quad (3.9)$$

On remarque que $[\text{Trd}] = [\text{Trg}]|_{A \mapsto A^{-1}}$, qui est un résultat qui se généralise.

Exemple 161 Calculons le polynôme de Jones du trèfle gauche orienté représenté à la figure 3.13.

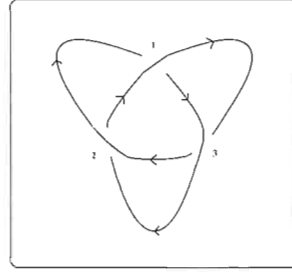


Figure 3.13 Le diagramme Trg° du trèfle gauche orienté

Selon la convention de la figure 3.11, on constate que la torsion de Trg° est $\rho(\text{Trg}^\circ) = -3$. On obtient donc

$$\begin{aligned}
 V_{\text{Trg}^\circ}(t) &= f_{\text{Trg}^\circ}(t^{-1/4}) \\
 &= \left(-t^{-1/4}\right)^{-3\rho(\text{Trg}^\circ)} [\text{Trg}^\circ] \\
 &= -\left(t^{-1/4}\right)^9 \cdot \left(-\left(t^{-1/4}\right)^{-5} - \left(t^{-1/4}\right)^3 + \left(t^{-1/4}\right)^7\right) \\
 &= \left(t^{-1/4}\right)^4 + \left(t^{-1/4}\right)^{12} - \left(t^{-1/4}\right)^{16}.
 \end{aligned}$$

On a donc

$$V_{\text{Trg}^\circ}(t) = t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}. \quad (3.10)$$

Remarque 162 Dans l'exemple 161, on a calculé le polynôme de Jones du diagramme orienté Trg° du trèfle gauche. On aurait pu calculer celui du diagramme orienté du trèfle droit, noté Trd° , pour obtenir

$$V_{\text{Trd}^\circ}(t) = t^1 + t^3 - t^4. \quad (3.11)$$

On remarque que $V_{\text{Trd}^\circ}(t) = V_{\text{Trg}^\circ}(t^{-1})$.

3.3 Le polynôme de Tutte et le polynôme de Jones

Le but visé dans cette section est de trouver une expression du polynôme crochet en fonction du polynôme de Tutte, et ce pour les diagrammes d'entrelacs alternés. Pour ce faire, nous introduisons la proposition qui suit.

Proposition 163 *Soit a et b des éléments non nuls d'un corps \mathbb{k} et soit \mathcal{G} l'ensemble des multigraphes avec boucles. Alors il existe une unique fonction $\chi' : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{k}[t, z]$ qui possède les propriétés suivantes:*

$$(i) \quad \chi'(\bullet \text{---} \bullet; t, z) = t \text{ et } \chi' \left(\begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ | \\ \bullet \end{array} ; t, z \right) = z.$$

(ii) *Si $e \in E$ est une arête d'un graphe $G = (V, E, I) \in \mathcal{G}$ qui n'est ni un isthme ni une boucle, alors*

$$\chi'(G; t, z) = a\chi'(G'_e; t, z) + b\chi'(G''_e; t, z). \quad (3.12)$$

(iii) *Si $e \in E$ est une arête d'un graphe $G = (V, E, I) \in \mathcal{G}$ qui est un isthme ou une boucle, alors*

$$\chi'(G; t, z) = \begin{cases} \chi'(\bullet \text{---} \bullet; t, z)\chi'(G''_e; t, z) & \text{si } e \text{ est un isthme,} \\ \chi' \left(\begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ | \\ \bullet \end{array} ; t, z \right) \chi'(G''_e; t, z) & \text{si } e \text{ est une boucle.} \end{cases} \quad (3.13)$$

En fait, la fonction χ' est donnée par

$$\chi'(G; t, z) = a^{|E|-r(G)} b^{r(G)} \chi(G; \frac{t}{b}, \frac{z}{a}), \quad (3.14)$$

où $r(G) = |V| - p_0(G)$ est le rang de G .

Preuve Voir la preuve dans le livre de Brylawski et Oxley (1992) et dans l'article de Chang et Shrock (2003). ■

On remarque que la proposition 163 signifie que n'importe quelle fonction qui satisfait les conditions (i), (ii) et (iii) s'avère être une fonction du polynôme de Tutte.

Définition 164 On définit les ensembles \mathcal{H} , \mathcal{H}_+ et \mathcal{H}_- par

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \{\text{Graphes plans signés dont toutes les arêtes sont de même signe}\}, \\ \mathcal{H}_+ &= \{\text{Graphes plans signés dont toutes les arêtes sont positives}\}, \\ \mathcal{H}_- &= \{\text{Graphes plans signés dont toutes les arêtes sont négatives}\}.\end{aligned}$$

Notons que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \cup \mathcal{H}_-$ et que c'est une partition de \mathcal{H} .

Lemme 165 *La fonction*

$$[\] \circ \tau : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{Z}[A^{-1}, A] \quad (3.15)$$

est telle que

$$[\] \circ \tau \left(\text{---}^+ \text{---} \right) = -A^{-3}, \quad (3.16)$$

$$[\] \circ \tau \left(\text{---}^+ \right) = -A^3, \quad (3.17)$$

$$[\] \circ \tau \left(\text{---}^- \text{---} \right) = -A^3, \quad (3.18)$$

$$[\] \circ \tau \left(\text{---}^- \right) = -A^{-3}. \quad (3.19)$$


Preuve En appliquant la définition 120 et la bijection de la figure 3.9, on a

$$\tau \left(\text{---}^+ \text{---} \right) = \text{---}^+ \text{---},$$

$$\tau \left(\text{---}^+ \right) = \text{---}^+ \text{---},$$

$$\tau \left(\text{---}^- \text{---} \right) = \text{---}^- \text{---},$$

$$\tau \left(\text{---}^- \right) = \text{---}^- \text{---}.$$

Ensuite, on calcule la valeur du polynôme crochet de chacun de ces noeuds. Par exemple, pour le noeud , on obtient

$$\begin{aligned}
 \left[\text{Diagram} \right] &= A [\bullet] + A^{-1} [\bullet \bullet] \\
 &= A + A^{-1} (-A^{-2} - A^2) [\bullet] \\
 &= A + A^{-1} (-A^{-2} - A^2) \\
 &= -A^{-3}.
 \end{aligned}$$


On a donc $[\] \circ \tau \left(\text{Diagram with a cross on the line} \right) = -A^{-3}$. Le calcul est similaire pour les autres noeuds. ■

Lemme 166 Soit D un diagramme d'entrelacs et soit $G = \tau^{-1}(D) = (V, E, I)$ le graphe plan signé qui lui correspond. Si $e \in E$ est une arête de G qui n'est ni une boucle ni un isthme, alors

$$[\] \circ \tau(G) = \begin{cases} A \cdot ([\] \circ \tau(G_e'')) + A^{-1} \cdot ([\] \circ \tau(G_e')) & \text{si } e \in E \text{ est positive,} \\ A \cdot ([\] \circ \tau(G_e')) + A^{-1} \cdot ([\] \circ \tau(G_e'')) & \text{si } e \in E \text{ est négative.} \end{cases} \quad (3.20)$$

Preuve Soit $e \in E$ une arête de G qui n'est ni une boucle ni un isthme. Par la relation (3.2) de la définition 149 du polynôme crochet, on a

$$\left[\begin{array}{c} T \\ S \quad S' \\ T' \end{array} \right] = A \left[\begin{array}{c} T \\ S = S' \\ T' \end{array} \right] + A^{-1} \left[\begin{array}{c} s \\ s' \end{array} \right]^{T=T'}.$$

Supposons que l'arête $e \in E$ soit positive. La figure 3.14 (i) montre que l'arête e dans G correspond localement à un croisement de la forme  dans D .

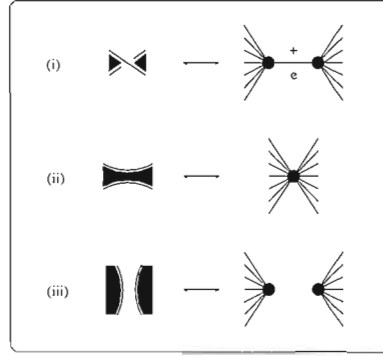




Figure 3.14 Équivalences locales entre graphe et entrelacs

Pour sa part, la figure 3.14 (ii) montre que le fait de contracter l'arête e dans G correspond localement au croisement dénoué . Finalement, la figure 3.14 (iii) montre que le fait de supprimer l'arête e dans G correspond localement au croisement dénoué . Ce qui démontre que

$$\begin{aligned} [\] \circ \tau(G''_e) &= \left[\begin{array}{c} T \\ S = S' \\ T' \end{array} \right], \\ [\] \circ \tau(G'_e) &= \left[\begin{array}{c} s \\ \tau \cdot \tau' \\ s' \end{array} \right]. \end{aligned}$$

On a bien

$$[\] \circ \tau(G) = A \cdot ([\] \circ \tau(G''_e)) + A^{-1} \cdot ([\] \circ \tau(G'_e)).$$

La preuve dans le cas d'une arête négative est similaire. ■

Lemme 167 Soit D un diagramme d'entrelacs et soit $G = \tau^{-1}(D) = (V, E, I)$ le graphe plan signé qui lui correspond.

(i) Si $e \in E$ est une arête de G qui est un isthme, alors

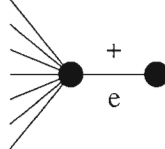
$$[\] \circ \tau(G) = \begin{cases} \left([\] \circ \tau \left(\begin{array}{c} + \\ \bullet \text{---} \bullet \end{array} \right) \right) \cdot ([\] \circ \tau(G''_e)) & \text{si } e \text{ est positif,} \\ \left([\] \circ \tau \left(\begin{array}{c} - \\ \bullet \text{---} \bullet \end{array} \right) \right) \cdot ([\] \circ \tau(G''_e)) & \text{si } e \text{ est négatif.} \end{cases} \quad (3.21)$$

(ii) Si $e \in E$ est une arête de G qui est une boucle, alors

$$[\] \circ \tau(G) = \begin{cases} \left([\] \circ \tau \left(\text{diagram of a loop with a dot and a '+' sign} \right) \right) \cdot ([\] \circ \tau(G''_e)) & \text{si } e \text{ est positive,} \\ \left([\] \circ \tau \left(\text{diagram of a loop with a dot and a '-' sign} \right) \right) \cdot ([\] \circ \tau(G''_e)) & \text{si } e \text{ est négative.} \end{cases} \quad (3.22)$$

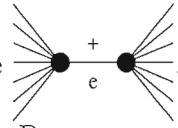
Preuve Soit D un diagramme d'entrelacs et soit $G = \tau^{-1}(D) = (V, E, I)$.

(i) Soit $e \in E$ un isthme positif de G . Supposons que l'isthme e soit du type

, c'est-à-dire que l'un des bouts est un sommet attaché à aucune autre arête que l'isthme e . On a

$$\begin{aligned} [\] \circ \tau(G) &= [\text{diagram of a loop with a dot and a '+' sign}] \\ &= A [\text{diagram of a loop with a dot and a '+' sign}] + A^{-1} [\text{diagram of a loop with a dot and a '-' sign}] \\ &= A [\text{diagram of a loop with a dot and a '+' sign}] + A^{-1} (-A^2 - A^{-2}) [\text{diagram of a loop with a dot and a '+' sign}] \\ &= -A^{-3} [\text{diagram of a loop with a dot and a '+' sign}] \\ &= -A^{-3} ([\] \circ \tau)(G''_e). \end{aligned}$$

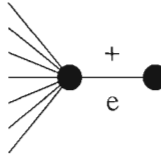
On obtient bien le résultat voulu.

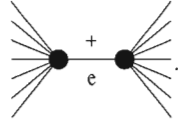
Supposons plutôt que l'isthme e soit du type . Posons K_1 et K_2 les deux bouts de l'isthme e , avec $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} [\] \circ \tau(G) &= [\text{diagram of two boxes K1 and K2 connected by a line with a dot and a '+' sign}] \\ &= A [\text{diagram of two boxes K1 and K2 connected by a line with a dot and a '+' sign}] + A^{-1} [\text{diagram of two boxes K1 and K2 connected by a line with a dot and a '-' sign}] \\ &= A[K_1 \# K_2] + A^{-1}[K_1 \sqcup K_2]. \end{aligned}$$

En utilisant (3.3) et (3.4), on obtient

$$\begin{aligned}
 [\] \circ \tau(G) &= A[K_1][K_2] + A^{-1}(-A^{-2} - A^2)[K_1][K_2] \\
 &= -A^{-3}[K_1][K_2] \\
 &= -A^{-3}([\] \circ \tau)(G''_e).
 \end{aligned}$$

On remarque que le cas de l'isthme  est un cas particulier de l'isthme



La preuve pour le cas d'un isthme négatif est similaire.

(ii) Soit $e \in E$ une boucle positive de G . On a

$$\begin{aligned}
 [\] \circ \tau(G) &= \left[\text{Diagram of a loop with a crossing} \right] \\
 &= A \left[\text{Diagram of a loop} \right] + A^{-1} \left[\text{Diagram of a loop} \right] \\
 &= A(-A^2 - A^{-2}) \left[\text{Diagram of a loop} \right] + A^{-1} \left[\text{Diagram of a loop} \right] \\
 &= -A^3 \left[\text{Diagram of a loop} \right] \\
 &= -A^3([\] \circ \tau)(G''_e).
 \end{aligned}$$

La preuve pour le cas d'une boucle négative est similaire.

■

Proposition 168 *Le diagramme suivant est commutatif:*

$$\begin{array}{ccc}
 \{\text{Diagrammes d'entrelacs alternés}\} & \xrightarrow{[\]} & \mathbb{Z}[A^{-1}, A] \\
 \tau \uparrow & & \nearrow \mathcal{K} \\
 \mathcal{H}_+ \cup \mathcal{H}_- & &
 \end{array} \tag{3.23}$$

où $\mathcal{X}(G) = (\mathcal{X}^+ \cup \mathcal{X}^-)(G)$ et

$$\begin{aligned}\mathcal{X}^+(G) &= A^{2|V|-|E|-2} \cdot \chi(G; -A^{-4}, -A^4), \quad \forall G \in \mathcal{H}_+, \\ \mathcal{X}^-(G) &= A^{-2|V|+|E|+2} \cdot \chi(G; -A^4, -A^{-4}), \quad \forall G \in \mathcal{H}_-.\end{aligned}\tag{3.24}$$

Preuve Soit D un diagramme d'entrelacs alterné et soit $G = (V, E, I) = \tau^{-1}(D)$ le graphe plan signé qui lui correspond. En vertu de la proposition 146, toutes les arêtes de G ont le même signe.

Considérons le cas où toutes les arêtes de G sont positives, c'est-à-dire que $G \in \mathcal{H}_+$. Dans ce cas, les lemmes 165, 166, et 167 nous permettent d'appliquer directement la formule (3.14). On a déjà calculé que

$$\begin{aligned}[\] \circ \tau \left(\begin{array}{c} + \\ \bullet \text{---} \bullet \end{array} \right) &= -A^{-3}, \\ [\] \circ \tau \left(\begin{array}{c} + \\ \text{loop} \\ \bullet \end{array} \right) &= -A^3.\end{aligned}$$

On pose

$$a = A^{-1} \text{ et } b = A$$

dans (3.14) et on obtient

$$\begin{aligned}[D] &= [\] \circ \tau(G) \\ &= (A^{-1})^{|E|-r(G)} (A)^{r(G)} \chi(G; \frac{-A^{-3}}{A}, \frac{-A^3}{A^{-1}}) \\ &= A^{2r(G)-|E|} \chi(G; -A^{-4}, -A^4) \\ &= A^{2|V|-|E|-2} \cdot \chi(G; -A^{-4}, -A^4).\end{aligned}$$

Maintenant, considérons le cas où toutes les arêtes de G sont négatives, c'est-à-dire que $G \in \mathcal{H}_-$. Les lemmes 165, 166, et 167 nous permettent d'appliquer directement la formule (3.14). On a déjà calculé que

$$\begin{aligned}[\] \circ \tau \left(\begin{array}{c} - \\ \bullet \text{---} \bullet \end{array} \right) &= -A^3, \\ [\] \circ \tau \left(\begin{array}{c} - \\ \text{loop} \\ \bullet \end{array} \right) &= -A^{-3}.\end{aligned}$$

On pose

$$a = A \text{ et } b = A^{-1}$$

dans (3.14) et on obtient

$$\begin{aligned} [D] &= [\] \circ \tau(G) \\ &= (A)^{|E|-r(G)} (A^{-1})^{r(G)} \chi(G; \frac{-A^3}{A^{-1}}, \frac{-A^{-3}}{A}) \\ &= A^{|E|-2r(G)} \chi(G; -A^4, -A^{-4}) \\ &= A^{|E|-2|V|+2} \cdot \chi(G; -A^4, -A^{-4}). \end{aligned}$$

■

Corollaire 169 *Soit D un diagramme d'entrelacs alterné et soit $G = \tau^{-1}(D) = (V, E, I)$ le graphe plan signé qui lui correspond. Le polynôme crochet de D s'exprime en fonction du polynôme de Tutte par*

$$[D] = \begin{cases} A^{2|V|-|E|-2} \cdot \chi(G; -A^4, -A^4) & \text{si } G \in \mathcal{H}_+, \\ A^{-2|V|+|E|+2} \cdot \chi(G; -A^4, -A^{-4}) & \text{si } G \in \mathcal{H}_-. \end{cases} \quad (3.25)$$

Preuve Ceci découle directement du diagramme commutatif (3.23). ■

Corollaire 170 *Soit D un diagramme d'entrelacs alterné orienté et soit $G = \tau^{-1}(D) = (V, E, I)$ le graphe plan signé qui lui correspond. Le polynôme de Jones V_D de D est donné par*

$$V_D(t) = \begin{cases} (-1)^{\rho(D)} \left(t^{-\frac{1}{4}}\right)^{(2|V|-|E|-2)-3\rho(D)} \cdot \chi(G; -t, -\frac{1}{t}) & \text{si } G \in \mathcal{H}_+, \\ (-1)^{\rho(D)} \left(t^{-\frac{1}{4}}\right)^{(-2|V|+|E|+2)-3\rho(D)} \cdot \chi(G; -\frac{1}{t}, -t) & \text{si } G \in \mathcal{H}_-. \end{cases} \quad (3.26)$$

Preuve Ceci découle directement de (3.25) et de la définition (3.5) du polynôme de Jones. ■

Les exemples 171 et 173 qui suivent illustrent le calcul du polynôme crochet et du polynôme de Jones en utilisant le polynôme de Tutte.

Exemple 171 Soit Trg le diagramme du trèfle gauche comme dans l'exemple 159.

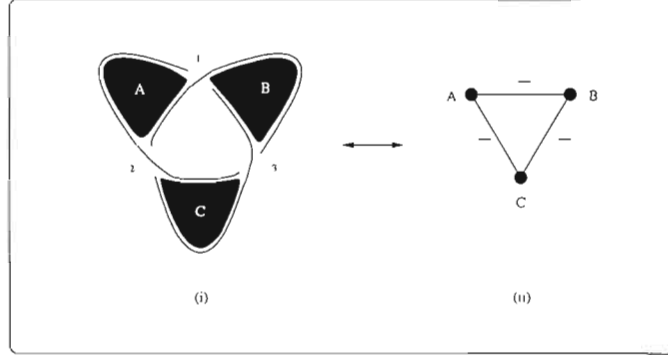


Figure 3.15 (i) Diagramme Trg bicolorié (ii) Graphe médian $g(\text{Trg})$

On construit le graphe médian signé $g(\text{Trg})$ tel que présenté à la figure 3.15 (ii). On calcule directement le polynôme de Tutte de $g(\text{Trg})$ en utilisant la formule (1.34) pour les cycles et on trouve

$$\chi(g(\text{Trg})); x, y) = y + x + x^2.$$

Ensuite, on utilise la formule (3.25) dans le cas des arêtes négatives et on trouve

$$\begin{aligned} [\text{Trg}] &= A^{-(2 \cdot 3) + 3 + 2} \cdot \chi(g(\text{Trg})); -A^4, -A^{-4} \\ &= A^{-1} \cdot \left((-A^{-4}) + (-A^4) + (-A^4)^2 \right) \\ &= -A^{-5} - A^3 + A^7. \end{aligned}$$

Remarque 172 Tel qu'attendu, on trouve la même valeur de $[\text{Trg}]$ que celle calculée par la définition du polynôme crochet dans l'exemple 159.

Exemple 173 Soit Trg° le diagramme orienté du trèfle gauche tel qu'illustré à la figure 3.13 et soit $g(\text{Trg}) = \tau^{-1}(\text{Trg})$ le graphe médian qui lui correspond, tel qu'illustré à la figure 3.15 (ii). On remarque que $\rho(\text{Trg}^\circ) = -3$. Le polynôme de Jones V_{Trg° de Trg°

est donné par

$$\begin{aligned}
 V_{\text{Trg}^\circ}(t) &= (-1)^{\rho(\text{Trg}^\circ)} \left(t^{-\frac{1}{4}}\right)^{(-2|V|+|E|-3\rho(\text{Trg}^\circ)+2)} \cdot \chi\left(\text{Trg}; -\frac{1}{t}, -t\right) \\
 &= -\left(t^{-\frac{1}{4}}\right)^{-2 \cdot 3 + 3 - (3 \cdot (-3)) + 2} \cdot \left((-t) + \left(-\frac{1}{t}\right) + \left(-\frac{1}{t}\right)^2\right) \\
 &= -t^{-2} \cdot \left((-t) + \left(-\frac{1}{t}\right) + \left(-\frac{1}{t}\right)^2\right) \\
 &= t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}.
 \end{aligned}$$

Remarque 174 Tel qu'attendu, on trouve la même valeur de $V_{\text{Trg}^\circ}(t)$ que celle calculée par la définition du polynôme de Jones dans l'exemple 161.

CHAPITRE IV

CALCULS SUR LES GRAPHES CONNEXES ET 2-CONNEXES

4.1 Équations fonctionnelles et fonctions de poids bloc-multiplicatives

4.1.1 Brève introduction à la théorie des espèces combinatoires

De façon informelle, une espèce combinatoire est une classe de structures discrètes étiquetées qui est fermée sous les isomorphismes induits par le réétiquetage le long de bijections. Pour une introduction complète à la théorie des espèces combinatoires, veuillez consulter l'article d'André Joyal (1981) ou les livres de Bergeron, Labelle et Leroux (1994, 1997).

À chaque espèce F sont associées des séries formelles, notamment la *série génératrice exponentielle*, notée $F(x)$, qui sert à dénombrer les structures étiquetées. On la définit par

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} |F[n]| \frac{x^n}{n!}, \quad (4.1)$$

où $|F[n]|$ désigne le nombre de F -structures sur l'ensemble $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$.

Les différentes opérations connues en analyse comme la somme, le produit, la composition et la dérivation s'appliquent sur les espèces combinatoires, de même que sur leurs séries formelles. Un *isomorphisme* $F \simeq G$ entre deux espèces, noté $F = G$, est une famille de bijections entre structures,

$$\alpha_U = F[U] \longrightarrow G[U],$$

où U varie sur l'ensemble des ensembles sous-jacents, qui commutent avec les réétiquetages. L'isomorphisme entre espèces donne lieu à l'égalité entre leur séries génératrices respectives, notamment $F(x) = G(x)$.

Par exemple, le fait que n'importe quel graphe simple défini sur un ensemble de sommets U consiste en l'union disjointe de graphes simples connexes se traduit par l'équation fonctionnelle

$$\mathcal{G} = E(\mathcal{G}^c),$$

où \mathcal{G} désigne l'espèce des graphes simples, \mathcal{G}^c est l'espèce des graphes simples connexes et E est l'espèce des ensembles. Cela correspond, au niveau des séries formelles, à la relation bien connue

$$\mathcal{G}(x) = \exp(\mathcal{G}^c(x)),$$

qui est la série génératrice exponentielle de l'espèce \mathcal{G} .

Pour les fins de ce travail, nous utilisons les espèces dans leur version pondérée. Une *espèce pondérée* est une espèce F munie d'une famille de *fonctions de poids* $w = \{w_U : F[U] \longrightarrow \mathbb{k}\}$, définies sur les F -structures, qui commutent avec les réétiquetages. Ici, \mathbb{k} est un anneau commutatif, habituellement un anneau de polynômes ou de séries formelles sur un corps de caractéristique zéro. On écrit $F = F_w$ pour mettre l'emphasis sur le fait que F est une espèce pondérée par la fonction de poids w . Les séries génératrices associées à F_w sont adaptées en remplaçant les cardinalités d'ensemble $|A|$ par les *poids totaux*, à savoir

$$|A|_w = \sum_{a \in A} w(a).$$

Définition 175 Soit \mathcal{G}^c l'espèce des graphes simples connexes. On définit les fonctions

de poids suivantes:

$$\varepsilon : \mathcal{G}^c \longrightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } \forall g \in \mathcal{G}^c, \varepsilon(g) = 1, \quad (4.2)$$

$$ac : \mathcal{G}^c \longrightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } \forall g \in \mathcal{G}^c, ac(g) = \text{Nombre d'arbres couvrants de } g, \quad (4.3)$$

$$\chi : \mathcal{G}^c \longrightarrow \mathbb{R}[t, z] \text{ telle que } \forall g \in \mathcal{G}^c, \chi(g) = \text{Polynôme de Tutte de } g, \quad (4.4)$$

$$N^* : \mathcal{G}^c \longrightarrow \mathbb{R}[\lambda] \text{ telle que } \forall g \in \mathcal{G}^c, N^*(g) = \text{Nombre de } \lambda\text{-flots à flux} \quad (4.5)$$

non nuls de g ,

$$R : \mathcal{G}^c \longrightarrow \mathbb{R}[p, q] \text{ telle que } \forall g \in \mathcal{G}^c, R(g) = \text{Polynôme de fiabilité de } g. \quad (4.6)$$

4.1.2 Les fonctions de poids bloc-multiplicatives

Un *point d'articulation* d'un graphe connexe est un point tel que le fait de le supprimer rend le graphe non connexe. On dit d'un graphe connexe G qu'il est *2-connexe* s'il ne contient aucun point d'articulation, c'est-à-dire que le fait de supprimer n'importe quel sommet de G le laisse connexe. Un *bloc* dans un graphe simple est un sous-graphe 2-connexe maximal. On remarque que la décomposition d'un graphe simple en blocs est unique. Le *graphe-bloc* d'un graphe simple connexe est un graphe dont les sommets sont les blocs du graphe connexe et les arêtes correspondent aux blocs partageant un point d'articulation. Le *bc-arbre* d'un graphe simple connexe g , noté $bc(g)$, est un arbre bicoloré dont les sommets noirs sont les blocs de g , les sommets blancs sont les points d'articulation de g et les arêtes correspondent aux relations d'incidence dans g . La figure 4.1 illustre l'exemple d'un graphe et des graphe-bloc et bc-arbre qui lui sont associés.

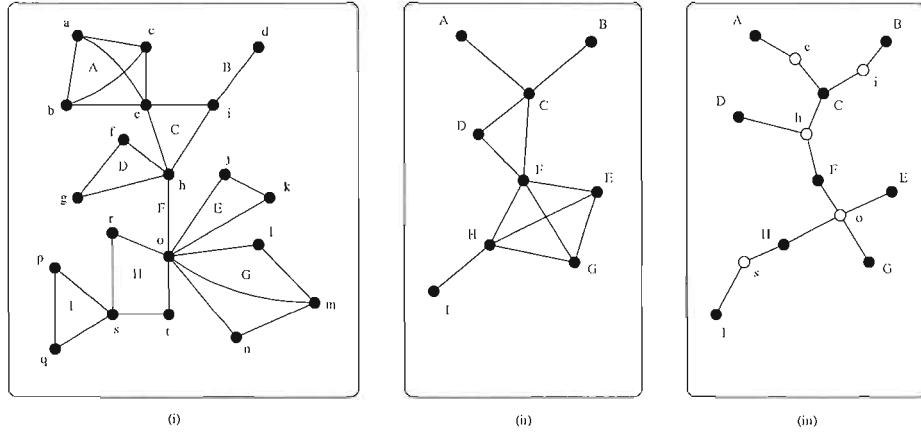


Figure 4.1 (i) Un graphe connexe g (ii) Le graphe-bloc de g (iii) Le bc -arbre $bc(g)$

Considérons maintenant \mathcal{B} une espèce donnée de graphes 2-connexes. On note $C_{\mathcal{B}}$ l'espèce des graphes connexes dont tous les blocs sont dans \mathcal{B} . On les appelle $C_{\mathcal{B}}$ -graphes.

Exemple 176 Si $\mathcal{B} = \mathcal{B}_a$, la classe de tous les graphes 2-connexes, alors $C_{\mathcal{B}} = C$, l'espèce de tous les graphes connexes. Ici, a tient pour *all* en anglais.

Exemple 177 Si $\mathcal{B} = K_2$, la classe des liens, alors $C_{\mathcal{B}} = a$, l'espèce des arbres (non enracinés, libres).

Exemple 178 Si $\mathcal{B} = \{P_m, m \geq 2\}$, où P_m désigne la classe des polygones à m côtés (par convention, $P_2 = K_2$), alors $C_{\mathcal{B}} = Ca$, l'espèce des cactus.

Exemple 179 Si $\mathcal{B} = \{K_n, n \geq 2\}$, la famille des graphes complets, alors $C_{\mathcal{B}} = Hu$, l'espèce des graphes de Husimi.

Définition 180 Une fonction de poids w définie sur l'espèce \mathcal{G} des graphes est dite *multiplicative sur les composantes connexes* si pour tout graphe $g \in \mathcal{G}[U]$ dont les composantes connexes sont c_1, c_2, \dots, c_k , on a

$$w(g) = w(c_1) \cdot w(c_2) \cdots w(c_k).$$

Définition 181 Une fonction de poids w est dite *bloc-multiplicative* si pour tout graphe connexe c dont les blocs sont b_1, b_2, \dots, b_k , on a

$$w(c) = w(b_1) \cdot w(b_2) \cdots w(b_k).$$

Proposition 182 *Les fonctions de poids*

$$\varepsilon, \text{ ac}, \chi, N^*, R$$

définies respectivement en (4.2), (4.3), (4.4), (4.5) et (4.6) sont bloc-multiplicatives.

Preuve Soit $g \in C$ un graphe simple connexe qui admet une décomposition en k blocs b_1, b_2, \dots, b_k .

1. On a

$$\varepsilon(g) = 1 = \prod_{i=1}^k \varepsilon(b_i).$$

2. Il est facile de constater que de choisir un arbre couvrant de g consiste à faire un choix indépendant d'arbres couvrants sur chacun des k blocs. On a donc

$$\text{ac}(g) = \prod_{i=1}^k \text{ac}(b_i),$$

ce qui montre que ac est bloc-multiplicative.

3. Par une extension du théorème 53 du chapitre 1, le polynôme de Tutte est multiplicatif sur les blocs d'un graphe. On a donc

$$\chi(g; x, y) = \prod_{i=1}^k \chi(b_i; x, y).$$

4. Soit $\lambda \geq 1$ un entier naturel. Par une extension de la proposition 94 du chapitre 2, le nombre de λ -flots à flux non nuls est multiplicatif sur les blocs d'un graphe.

On a donc

$$N^*(g; \lambda) = \prod_{i=1}^k N^*(b_i; \lambda).$$

5. Soit $p \in [0, 1]$. Par une extension de la proposition 101 du chapitre 2, la probabilité que le graphe résiduel de G soit connexe est multiplicative sur les blocs d'un graphe. Ainsi, la probabilité que le graphe résiduel de G soit connexe consiste en la probabilité indépendante que chacun des graphes résiduels des blocs b_1, b_2, \dots, b_k soit connexe. On a donc

$$R(g, p) = \prod_{i=1}^k R(b_i; x, y).$$

■

4.1.3 L'équation fonctionnelle $C'_B = E(B'(C_B^\bullet))$

L'équation fonctionnelle qui est présentée dans le théorème qui suit est bien connue et se retrouve notamment chez Bergeron, Labelle et Leroux (1994), Harary et Palmer (1973), Joyal (1981), Labelle (1983), Leroux (1988), Leroux et Miloudi (1992), Norman (1954), Riddell (1951), Robinson (1970), Uhlenbeck et Ford (1963) et Husimi (1950). Tout d'abord, on rappelle que pour toute espèce F , la dérivée F' de F est l'espèce définie comme suit: une F' -structure sur un ensemble U est une F -structure sur l'ensemble $U \cup \{*\}$, où $*$ est un élément externe (non étiqueté). Autrement dit,

$$F'[U] = F[U + \{*\}].$$

De plus, l'opération $F \longrightarrow F^\bullet$ de pointage (ou d'enracinement) de F -structures en un élément d'un ensemble sous-jacent peut-être définie par

$$F^\bullet = X \cdot F'. \quad (4.7)$$

Théorème 183 *Soit B une classe de graphes 2-connexes et C_B l'espèce des graphes connexes dont tous les blocs sont dans B . Alors on a l'équation fonctionnelle*

$$C'_B = E(B'(C_B^\bullet)). \quad (4.8)$$

Preuve La figure 4.2 schématise l'isomorphisme entre les espèces C'_B et $E(B'(C_B^\bullet))$.

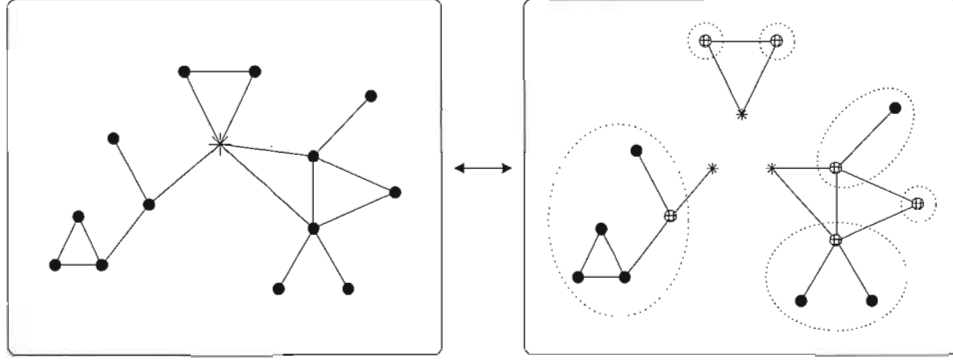


Figure 4.2 L'équation fonctionnelle $C'_B = E(B'(C_B^\bullet))$

À gauche, une C'_B -structure sur l'ensemble U est représentée. On a donc une C_B -structure construite sur un ensemble $U \cup \{*\}$. À droite, l'élément étoile est partagé autant de fois qu'il fait partie d'un bloc dans la C_B -structure. Dans chacun de ces blocs, les sommets (hormis $\{*\}$) sont les points d'attache (les racines) de C_B^\bullet -structures. On a donc une assemblée de $B'(C_B^\bullet)$ -structures, c'est-à-dire que $C'_B = E(B'(C_B^\bullet))$. ■

L'équation fonctionnelle (4.8) permet de mettre en relation les espèces C_B^\bullet et B' . Pour ce faire, il suffit de multiplier (4.8) par X et d'appliquer (4.7) pour obtenir

$$C_B^\bullet = X \cdot E(B'(C_B^\bullet)). \quad (4.9)$$

L'équation (4.9) donne lieu à l'égalité entre les séries génératrices exponentielles

$$C_B^\bullet(x) = x \cdot \exp(B'(C_B^\bullet(x))). \quad (4.10)$$

Le théorème 183 trouve son équivalent au niveau des espèces pondérées. Il est utilisé dans ce chapitre pour effectuer des calculs au niveau de l'espèce des graphes connexes pondérés par une fonction de poids bloc-multiplicative.

Théorème 184 *Soit w une fonction de poids bloc-multiplicative définie sur l'espèce des graphes connexes dont tous les blocs sont dans une espèce \mathcal{B} donnée. Alors*

$$(C_B^\bullet)_w = X \cdot E(B'_w((C_B^\bullet)_w)). \quad (4.11)$$

Preuve Tout d'abord, rappelons la formule (4.8):

$$C'_B = E(B'(C_B^\bullet)).$$

On veut établir la version pondérée de cette équation fonctionnelle, à savoir qu'on veut montrer que

$$(C'_B)_w = E(B'_w((C_B^\bullet)_w)). \quad (4.12)$$

Puisque la bijection entre les structures C'_B et $E(B'(C_B^\bullet))$ a déjà été démontrée dans le théorème 183, il suffit, pour prouver (4.12), de montrer que le poids est préservé le long de cette bijection.

À la figure 4.2, on constate que les blocs de la C'_B -structure sont préservés lors de l'éclatement de l'élément $*$. Étant donné que la fonction de poids w est bloc-multiplicative, les structures C'_B et $E(B'(C_B^\bullet))$ ont le même poids. On a montré la relation (4.12).

Maintenant, le fait de multiplier chaque membre de (4.12) par l'espèce singleton X consiste à substituer l'élément $*$ par un élément distingué, ce qui n'a aucun impact sur les blocs de chaque structure. L'équation (4.12) devient alors

$$X \cdot (C'_B)_w = (C_B^\bullet)_w = X \cdot E(B'_w((C_B^\bullet)_w)),$$

ce qui montre (4.11). ■

Le théorème 184 permet notamment de trouver l'égalité suivante:

$$(C_B^\bullet)_w(x) = x \cdot \exp(B'_w((C_B^\bullet)_w))(x). \quad (4.13)$$

4.2 Calculs sur les graphes 2-connexes

Considérons l'espèce $(B_a)_w$ de tous les graphes 2-connexes pondérés par la fonction de poids w . La série génératrice exponentielle de $(B_a)_w$ est donnée par

$$(B_a)_w(x) = \sum_{n \geq 0} |B_a[n]|_w \frac{x^n}{n!}, \quad (4.14)$$

où $|\mathcal{B}_a[n]|_w$ désigne le nombre de \mathcal{B}_a -structures sur n points pondérées par w .

Dans cette section, on s'intéresse à calculer les coefficients $|\mathcal{B}_a[n]|_w$ de la série génératrice (4.14), et ce pour diverses fonctions de poids w . Plus précisément, on considère les fonctions de poids ε , ac , χ , N^* et R définies respectivement en (4.2), (4.3), (4.4), (4.5) et (4.6).

Tout d'abord, l'ensemble des classes d'isomorphie de graphes 2-connexes sur 2, 3, 4, 5 et 6 sommets est présenté à l'appendice A. On y retrouve, pour chaque classe, un tableau de la forme de celui du tableau 4.1. On remarque qu'il n'existe pas de graphe 2-connexe sur 0 et 1 sommet.

Numéro	Nombre d'étiquetages de G
Classe de graphes 2-connexes	Polynôme de Tutte de G en les variables t et z
	Nombre d'arbres couvrants de G
	Polynôme chromatique de G en la variable λ
	Polynôme de flot de G en la variable λ
	Polynôme de fiabilité de G en les variables p et $q = (1 - p)$

Tableau 4.1 Tableau général des informations pour chaque classe de graphes 2 - connexes

On calcule directement les coefficients $|\mathcal{B}_a[n]|_w$ de la série (4.14) en utilisant l'expression

$$|\mathcal{B}_a[n]|_w = \sum_{g \in \mathcal{B}_a[n]/\sim} \frac{n!}{|\text{aut}(g)|} \cdot w(g), \quad (4.15)$$

où $\mathcal{B}_a[n]/\sim$ désigne les types d'isomorphie de \mathcal{B}_a -structures et $|\text{aut}(g)|$ désigne le nombre d'automorphismes de g .

Pour conclure, les tableaux B.1, B.2, B.3, B.4 et B.5 présentés à l'appendice B expriment les valeurs du coefficient $|\mathcal{B}_a[n]|_w$ selon les fonctions de poids ε , ac , χ , N^* et R pour les valeurs de $n = 2, 3, 4, 5$ et 6.

4.3 Calculs sur les graphes connexes

Considérons $(C_{\mathcal{B}})_w$ l'espèce des graphes connexes pondérés par la fonction de poids bloc-multiplicative w dont tous les blocs sont dans l'espèce $\mathcal{B} = \mathcal{B}_a$, c'est-à-dire l'espèce de tous les graphes 2-connexes. La série génératrice exponentielle de l'espèce $(C_{\mathcal{B}})_w$ est donnée par

$$(C_{\mathcal{B}})_w(x) = \sum_{n \geq 0} |C_{\mathcal{B}}[n]|_w \frac{x^n}{n!}, \quad (4.16)$$

où $|C_{\mathcal{B}}[n]|_w$ désigne le poids total de toutes les $C_{\mathcal{B}}$ -structures étiquetées sur n points.

Dans cette section, on s'intéresse à calculer les coefficients $|C_{\mathcal{B}}[n]|_w$ en utilisant l'équation fonctionnelle (4.11) qui est

$$(C_{\mathcal{B}}^\bullet)_w = X \cdot E(\mathcal{B}'_w((C_{\mathcal{B}}^\bullet)_w)).$$

Comme on l'a vu précédemment, cette dernière donne lieu à l'égalité

$$(C_{\mathcal{B}}^\bullet)_w(x) = x \cdot \exp(\mathcal{B}'_w((C_{\mathcal{B}}^\bullet)_w))(x), \quad (4.17)$$

où $(C_{\mathcal{B}}^\bullet)_w(x)$ est la série génératrice exponentielle de l'espèce $(C_{\mathcal{B}}^\bullet)_w$. Cette dernière est donnée par

$$(C_{\mathcal{B}}^\bullet)_w(x) = \sum_{n \geq 0} |C_{\mathcal{B}}^\bullet[n]|_w \frac{x^n}{n!}. \quad (4.18)$$

Nous allons utiliser le fait que l'équation fonctionnelle (4.11) met en relation les espèces $(C_{\mathcal{B}}^\bullet)_w$ et \mathcal{B}'_w , à savoir qu'elle permet d'établir une relation entre les coefficients $|C_{\mathcal{B}}^\bullet[n]|_w$ et $|\mathcal{B}'[n]|_w$. Plus précisément, l'inversion de Lagrange¹ appliquée à (4.11) nous apprend que

$$[x^n](C_{\mathcal{B}}^\bullet)_w(x) = \frac{1}{n} \cdot [t^{n-1}](E \circ \mathcal{B}'_w)^n(t). \quad (4.19)$$

On remarque dans (4.18) que $|C_{\mathcal{B}}^\bullet[n]|_w = n! \cdot [x^n](C_{\mathcal{B}}^\bullet)_w(x)$. On y substitue (4.19) et on obtient

$$|C_{\mathcal{B}}^\bullet[n]|_w = n! \cdot \frac{1}{n} \cdot [t^{n-1}](E \circ \mathcal{B}'_w)^n(t). \quad (4.20)$$

¹Pour de plus amples détails concernant la méthode de l'inversion de Lagrange, veuillez vous référer au livre de Bergeron, Labelle et Leroux (1994).

Développons en détail l'expression (4.20). On obtient

$$|C_{\mathcal{B}}^{\bullet}[n]|_w = (n-1)! \cdot [t^{n-1}] \left(\sum_{m \geq 0} \frac{\left(\sum_{k \geq 1} |\mathcal{B}[k+1]|_w \frac{t^k}{k!} \right)^m}{m!} \right)^n \quad (4.21)$$

On remarque que l'expression (4.21) requiert les coefficients $|\mathcal{B}[k+1]|_w$ pour lesquels nous avons calculé les valeurs à la section 4.2. En fait, nous avons calculé les valeurs de $|\mathcal{B}[k+1]|_w$ pour $2 \leq k+1 \leq 6$, mais on constate aisément que pour toute fonction de poids w , $|\mathcal{B}[0]|_w = |\mathcal{B}[1]|_w = 0$. En substituant dans l'expression (4.21) les coefficients $|\mathcal{B}[k+1]|_w$ déjà calculés, on obtient, pour $1 \leq n \leq 6$,

$$|C_{\mathcal{B}}^{\bullet}[n]|_w = (n-1)! \cdot [t^{n-1}] \left(\sum_{m=0}^5 \frac{\left(\sum_{k=1}^5 |\mathcal{B}[k+1]|_w \frac{t^k}{k!} \right)^m}{m!} \right)^n. \quad (4.22)$$

L'expression (4.22) nous permet de trouver, à partir des coefficients $|\mathcal{B}[k+1]|_w$, $2 \leq k+1 \leq 6$, les coefficients $|C_{\mathcal{B}}^{\bullet}[n]|_w$, $1 \leq n \leq 6$.

Finalement, les coefficients $|C_{\mathcal{B}}[n]|_w$ de la série génératrice (4.16) s'obtiennent directement de ceux de la série génératrice de l'espèce $(C_{\mathcal{B}}^{\bullet})_w$. En effet, il suffit de retirer le pointage de $(C_{\mathcal{B}}^{\bullet})_w$ pour obtenir

$$|C_{\mathcal{B}}[n]|_w = \frac{1}{n} |C_{\mathcal{B}}^{\bullet}[n]|_w.$$

Les tableaux C.1, C.2, C.3, C.4 et C.5 présentés à l'appendice C expriment les valeurs de $|C_{\mathcal{B}}[n]|_w$ selon les fonctions de poids ε , ac , χ , \mathbb{N}^* , \mathbb{R} , pour $1 \leq n \leq 6$.

4.4 Les λ -flots sur les graphes 2-connexes à quatre sommets et les marches de longueur trois dans $\mathbb{N}^{\lambda-1}$

Considérons le tableau B.4 de l'appendice B qui présente les polynômes $|\mathcal{B}_a[n]|_{\mathbb{N}^*}(\lambda)$, pour $2 \leq n \leq 6$. Plus particulièrement, on s'intéresse au polynôme $|\mathcal{B}_a[4]|_{\mathbb{N}^*}(\lambda)$, qui est donné par

$$|\mathcal{B}_a[4]|_{\mathbb{N}^*}(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda^2 + \lambda - 3), \quad \lambda \in \mathbb{N}^*. \quad (4.23)$$

On rappelle que $N^*(g)$ est le nombre de λ -flots à flux non nuls sur un multigraphe orienté g , comme dans la définition 88.

Considérons maintenant l'évaluation de $|B_a[4]|_{N^*}(\lambda)$, pour $1 \leq \lambda \leq 10$, dont le tableau 4.2 présente les valeurs. Le recours à *L'Encyclopédie en ligne des suites de*

λ	$ B_a[4] _{N^*}(\lambda)$
1	0
2	3
3	18
4	51
5	108
6	195
7	318
8	483
9	696
10	963

Tableau 4.2 Valeurs de $|B_a[4]|_{N^*}(\lambda)$, $1 \leq \lambda \leq 10$

nombre entiers (Sloane, 2005) a permis de mettre en relation ces valeurs avec le nombre de marches de longueur trois dans $N^{\lambda-1}$. Voici de quelle façon.

Définition 185 Soit $N^n \subseteq \mathbb{R}^n$. Une *marche de longueur* $k \in \mathbb{N}$ dans N^n consiste en la donnée d'un point de départ $p_0 \in N^n$ et d'une succession de k pas continus, c'est-à-dire d'une suite de points $(p_i)_{0 \leq i \leq k}$, $p_i \in N^n$ telle que $|p_{i+1} - p_i| = 1$, $0 \leq i \leq k-1$. Chaque $p_i \in N^n$ est un *pas* de la marche, $1 \leq i \leq k$.

Définition 186 Soit $N^n \subseteq \mathbb{R}^n$. On définit $M_3 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ la fonction qui envoie un entier naturel n sur le nombre de marches de longueur trois dans N^n , ayant comme point de départ l'origine de N^n , c'est-à-dire $(0, 0, \dots, 0) \in N^n$.

Proposition 187 Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction M_3 est telle que

$$M_3(n) = n(n^2 + 3n - 1). \quad (4.24)$$

Preuve Analysons en détail le cas $n = 3$. Soit $m = \{(0, 0, 0), p_1, p_2, p_3\}$ une marche de longueur trois dans \mathbb{N}^3 , ayant comme point de départ l'origine $(0, 0, 0)$. On remarque que m est entièrement déterminée par p_2 , c'est-à-dire qu'après avoir fait deux pas dans \mathbb{N}^3 , le dernier pas mène nécessairement au point final p_3 . À la figure 4.3, les points blancs ①, ② et ③ montrent les possibilités pour le deuxième pas p_2 de la marche m . Les points ● montrent les possibilités pour le troisième pas p_3 . On remarque que le point ① est l'origine de \mathbb{N}^3 , les points ② sont situés sur l'un des axes de \mathbb{N}^3 alors que les points ③ sont situés dans l'un des trois plans $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \subset \mathbb{N}^3$.

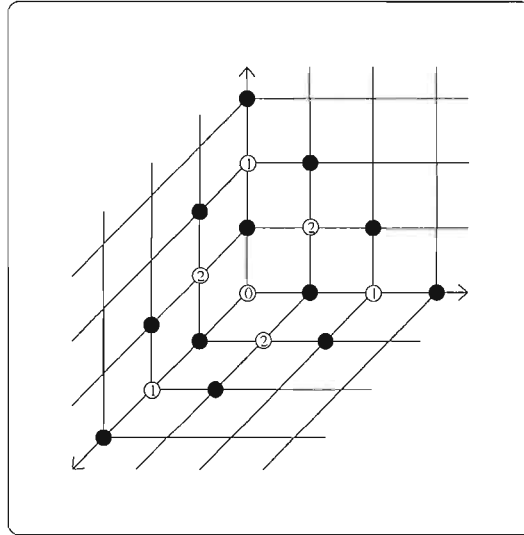


Figure 4.3 Les marches de longueur 3 dans \mathbb{N}^3

Supposons que le deuxième pas de la marche m soit le point ①, c'est-à-dire l'origine $(0, 0, 0)$. À partir de l'origine de \mathbb{N}^3 , il y a trois façons d'y retourner en deux pas, c'est-à-dire que l'on peut faire un pas sur l'un des trois axes et revenir en arrière. De plus, il y a trois possibilités pour le troisième pas, qui consiste à faire un pas sur

l'un des trois axes. Il y a donc 9 marches de longueur trois dont le deuxième pas est l'origine.

Maintenant, supposons que la marche m passe par l'un des points ①. On remarque que pour arriver à un point ① à partir de l'origine, il n'y a qu'une seule possibilité pour le premier pas, qui doit être nécessairement sur le même axe que le point ①. Ensuite, à partir d'un point ①, il y a quatre possibilités pour le troisième pas. En effet, soit le dernier pas avance ou recule d'un pas sur l'axe, soit il va dans l'un des deux plans dont l'axe est l'intersection. Donc il y a 4 marches de longueur trois qui passent par chaque point ①. Comme il y a trois points ①, on en conclut qu'il y a 12 marches de longueur trois qui passent par les points ①.

En terminant, supposons que m passe par un point ②. Pour arriver en deux pas à un point ② à partir de l'origine, il n'y a que deux façons. Ensuite, on remarque qu'il y a cinq possibilités pour le troisième pas. En effet, le troisième pas est soit dans le même plan que ②, soit il quitte ce plan. Donc il y a 10 marches de longueur trois qui passe par chaque point ②. Puisqu'il y a trois points ②, on conclut qu'il y a 30 marches de longueur trois qui passent par les points ②. On a montré que

$$M_3(3) = 9 + 12 + 30 = 51,$$

ce qui vérifie bien la formule (4.24).

D'une manière générale, en conservant les notations des points de type ①, ② et ③ pour une marche $m = ((0, 0, 0), p_1, p_2, p_3)$ dans \mathbb{N}^n , on a

$$M_3(n) = \sum_{k=0}^2 p_1(k) \cdot p_2(k) \cdot p_3(k),$$

$$\text{où } \begin{cases} p_1(k) = & \text{Nombre de possibilités d'arriver au point } \textcircled{k} \text{ en deux pas,} \\ p_2(k) = & \text{Nombre de points } \textcircled{k}, \\ p_3(k) = & \text{Nombre de possibilités pour le troisième pas à partir du} \\ & \text{point } \textcircled{k}. \end{cases}$$

Pour le point ①, on remarque que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} p_1(0) &= n, \\ p_2(0) &= 1, \\ p_3(0) &= n. \end{aligned}$$

Pour les points ②, on remarque que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} p_1(1) &= 1, \\ p_2(1) &= n, \\ p_3(1) &= n + 1. \end{aligned}$$

Pour les points ③, on remarque que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} p_1(2) &= 2, \\ p_2(2) &= \binom{n}{2}, \\ p_3(2) &= n + 2. \end{aligned}$$

On en conclut que

$$\begin{aligned} M_3(n) &= n^2 + n(n+1) + 2(n+2) \binom{n}{2} \\ &= n(n^2 + 3n - 1). \end{aligned}$$

■

La proposition qui suit établit l'égalité entre le poids total des λ -flots à flux non nuls sur les graphes 2-connexes à quatre sommets et le nombre de marches de longueur trois dans $\mathbb{N}^{\lambda-1}$.

Proposition 188 *Soit un entier $\lambda \geq 1$. On a l'égalité*

$$|\mathcal{B}_a[4]|_{\mathbb{N}^*}(\lambda) = M_3(\lambda - 1). \quad (4.25)$$

Preuve Par la relation (4.23), on a

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{B}_a[4]|_{N^*}(\lambda) &= (\lambda - 1) (\lambda^2 + \lambda - 3) \\
 &= (\lambda - 1) \left((\lambda - 1)^2 + 3(\lambda - 1) - 1 \right) \\
 &= M_3(\lambda - 1).
 \end{aligned}$$

■

Remarque 189 La preuve de la proposition 188 repose sur un argument algébrique. Il serait intéressant de trouver une interprétation combinatoire de l'égalité (4.25).

CONCLUSION

L'objectif visé dans ce travail consistait en la présentation du polynôme de Tutte, et ce à la manière de son idéateur, M. William Thomas Tutte. Nous avons également dressé un portrait de l'éventail des applications possibles de ce polynôme, notamment en théorie des graphes, en physique de la mécanique statistique, de même qu'en théorie des noeuds. À cet égard, nous avons fait la démonstration que le polynôme de Tutte admet une spécialisation en terme de la fonction de partition d'un modèle de Potts, ainsi qu'en terme du polynôme de Jones d'un entrelacs alterné. En fait, nous avons vu que n'importe quelle fonction de graphes qui s'exprime par une relation de suppression et de contraction d'arêtes est une évaluation du polynôme de Tutte.

Au dernier chapitre, nous avons calculé, pour diverses fonctions de poids bloc-multiplicatives, le poids total de tous les graphes 2-connexes et connexes sur moins de six sommets. Cela nous a permis, entre autres, d'établir l'égalité entre le poids total des λ -flots à flux non nuls sur les graphes 2-connexes à quatre sommets et le nombre de marches de longueur trois dans l'hypercube de dimension $\lambda - 1$.

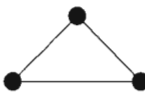
Il est à noter que la recherche concernant le polynôme de Tutte est très active actuellement. Tout d'abord, le polynôme de Tutte se définit dans un contexte beaucoup plus général que la théorie des graphes, à savoir dans le contexte des matroïdes. Ensuite, il a été généralisé en utilisant les graphes coloriés (Bollobas et Riordan, 1999). Il serait intéressant d'établir les relations entre ce polynôme de Tutte généralisé et, par exemple, les invariants d'entrelacs de la théorie des noeuds.

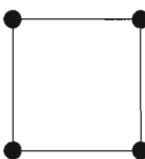
APPENDICE A

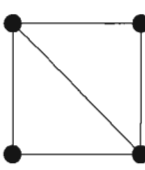
RÉSULTATS POUR LES GRAPHES 2-CONNEXES SUR n SOMMETS, $2 \leq n \leq 6$

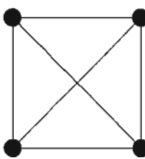
Numéro	Nombre d'étiquetages de G
Graphe G	Polynôme de Tutte de G en les variables t et z
	Nombre d'arbres couvrants de G
	Polynôme chromatique de G en la variable λ
	Polynôme de flot de G en la variable λ
	Polynôme de fiabilité de G en les variables p et $q = (1 - p)$

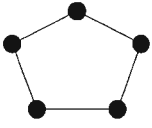
2	1
	t
	1
	$\lambda(-1 + \lambda)$
	0
	p

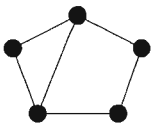
3	1
	$t^2 + t + z$
	3
	$\lambda(-1 + \lambda)(\lambda - 2)$
	$-1 + \lambda$
	$p^2(2q + 1)$

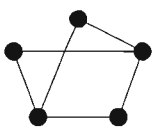
4.1	3
	$t^3 + t^2 + t + z$
	4
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 3)$
	$-1 + \lambda$
	$p^3(3q + 1)$

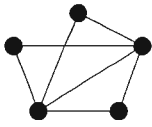
4.2	6
	$t^3 + 2t^2 + 2tz + t + z + z^2$
	8
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$
	$(\lambda - 1)(\lambda - 2)$
	$p^3(4q^2 + 3q + 1)$

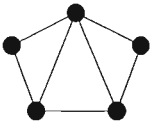
4.3	1
	$3t^2 + 4tz + 3z^2 + 2t + 2z + z^3 + t^3$
	16
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$
	$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$
	$p^3(6q^3 + 6q^2 + 3q + 1)$

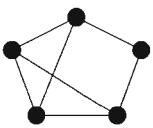
5.1	12
	$t^4 + t^3 + t^2 + t + z$
	5
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 2)$
	$\lambda - 1$
	$p^4(4q + 1)$

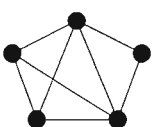
5.2	60
	$t^4 + 2t^3 + t^2z + 2t^2 + 2tz + t + z^2 + z$
	11
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda^2 - 3\lambda + 3)$
	$(\lambda - 2)(\lambda - 1)$
	$p^4(6q^2 + 4q + 1)$

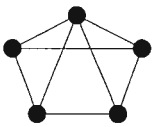
5.3	10
	$t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 3tz + t + z^2 + z$
	12
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda^3 - 5\lambda^2 + 10\lambda - 7)$
	$(\lambda - 2)(\lambda - 1)$
	$p^4(7q^2 + 4q + 1)$

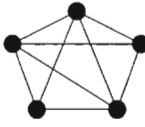
5.4	10
	$t^4 + 3t^3 + 3t^2z + 3t^2 + 3tz^2 + 3tz + t + z^3 + z^2 + z$
	20
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)^3$
	$(\lambda^2 - 3\lambda + 3)(\lambda - 1)$
	$p^4(8q^3 + 7q^2 + 4q + 1)$

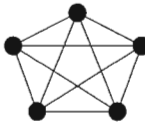
5.5	60
	$t^4 + 3t^3 + 3t^2z + 3t^2 + 2tz^2 + 4tz + t + z^3 + 2z^2 + z$
	21
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)^3$
	$(\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$
	$p^4(8q^3 + 8q^2 + 4q + 1)$

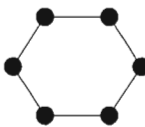
5.6	30
	$t^4 + 3t^3 + 2t^2z + 4t^2 + tz^2 + 5tz + 2t + z^3 + 3z^2 + 2z$
	24
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 5)$
	$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$
	$p^4(10q^3 + 9q^2 + 4q + 1)$

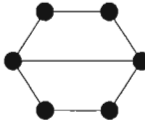
5.7	30
	$t^4 + 4t^3 + 5t^2z + 5t^2 + tz^3 + 5tz^2 + 7tz + 2t + z^4 + 3z^3 + 4z^2 + 2z$
	40
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda - 2)^2$
	$(\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 5)$
	$p^4(12q^4 + 14q^3 + 9q^2 + 4q + 1)$

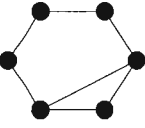
5.8	15
	$t^4 + 4t^3 + 4t^2z + 6t^2 + 4tz^2 + 9tz + 3t + z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 3z$
	45
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda^2 - 5\lambda + 7)$
	$(\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 7)$
	$p^4(14q^4 + 16q^3 + 10q^2 + 4q + 1)$

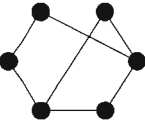
5.9	10
	$t^4 + 5t^3 + 7t^2z + 8t^2 + 2tz^3 + 9tz^2 + 13tz + 4t + z^5 + 4z^4 + 8z^3 + 9z^2 + 4z$
	75
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)^2$
	$(\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 14\lambda - 13)$
	$p^4(1 + 4q + 10q^2 + 24q^4 + 18q^3 + 18q^5)$

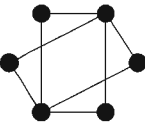
5.10	1
	$t^4 + 6t^3 + 10t^2z + 11t^2 + 5tz^3 + 15tz^2 + 20tz + 6t + z^6 + 4z^5 + 10z^4 + 15z^3 + 15z^2 + 6z$
	125
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 4)$
	$(\lambda - 1)(\lambda^5 - 9\lambda^4 + 36\lambda^3 - 79\lambda^2 + 96\lambda - 51)$
	$p^4(1 + 4q + 10q^2 + 30q^4 + 20q^3 + 36q^5 + 24q^6)$

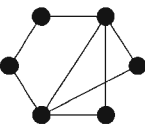
6.1	60
	$t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + z$
	6
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda^4 - 5\lambda^3 + 10\lambda^2 - 10\lambda + 5)$
	$-1 + \lambda$
	$(5q + 1)p^5$

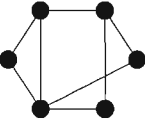
7.1	180
	$t^5 + 2t^4 + 3t^3 + 2t^2z + 2t^2 + 2tz + t + z^2 + z$
	15
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 3)^2$
	$(-1 + \lambda)(\lambda - 2)$
	$(9q^2 + 5q + 1)p^5$

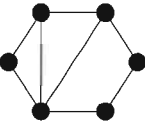
7.2	360
	$t^5 + 2t^4 + t^3z + 2t^3 + t^2z + 2t^2 + 2tz + t + z^2 + z$
	14
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 2)(\lambda - 2)^2$
	$(-1 + \lambda)(\lambda - 2)$
	$(8q^2 + 5q + 1)p^5$

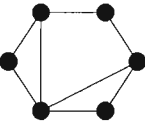
7.3	180
	$t^5 + 2t^4 + 3t^3 + t^2z + 3t^2 + 3tz + t + z^2 + z$
	16
	$\lambda(\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda^3 - 4\lambda^2 + 7\lambda - 5)$
	$(-1 + \lambda)(\lambda - 2)$
	$(10q^2 + 5q + 1)p^5$

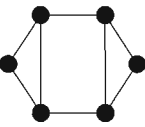
8.1	15
	$t^5 + 3t^4 + 6t^3 + 6t^2z + 4t^2 + 4tz^2 + 4tz + t + z^3 + z^2 + z$
	32
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda^4 - 7\lambda^3 + 21\lambda^2 - 29\lambda + 15)$
	$(-1 + \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 3)$
	$(15q^3 + 11q^2 + 5q + 1)p^5$

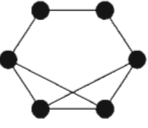
8.2	180
	$t^5 + 3t^4 + 2t^3z + 4t^3 + t^2z^2 + 4t^2z + 3t^2 + 3tz^2 + 3tz + t + z^3 + z^2 + z$
	28
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 3)(\lambda - 2)^2$
	$(-1 + \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 3)$
	$(12q^3 + 10q^2 + 5q + 1)p^5$

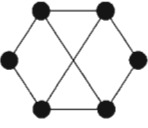
8.3	360
	$t^5 + 3t^4 + t^3z + 5t^3 + 5t^2z + 4t^2 + 3tz^2 + 5tz + t + z^3 + 2z^2 + z$
	32
	$\lambda(\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda^3 - 5\lambda^2 + 10\lambda - 7)$
	$(\lambda - 2)^2(-1 + \lambda)$
	$(14q^3 + 12q^2 + 5q + 1)p^5$

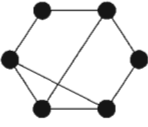
8.4	720
	$t^5 + 3t^4 + 2t^3z + 4t^3 + t^2z^2 + 4t^2z + 3t^2 + 2tz^2 + 4tz + t + z^3 + 2z^2 + z$
	29
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 3)(\lambda - 2)^2$
	$(\lambda - 2)^2(-1 + \lambda)$
	$(12q^3 + 11q^2 + 5q + 1)p^5$

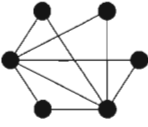
8.5	360
	$t^5 + 3t^4 + 2t^3z + 4t^3 + 5t^2z + 3t^2 + 3tz^2 + 4tz + t + z^3 + 2z^2 + z$
	30
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 3)(\lambda - 2)^2$
	$(\lambda - 2)^2(-1 + \lambda)$
	$(12q^3 + 12q^2 + 5q + 1)p^5$

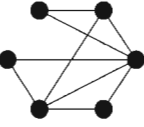
8.6	180
	$t^5 + 3t^4 + 2t^3z + 4t^3 + 5t^2z + 3t^2 + 3tz^2 + 4tz + t + z^3 + 2z^2 + z$
	30
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 3)(\lambda - 2)^2$
	$(\lambda - 2)^2(-1 + \lambda)$
	$(12q^3 + 12q^2 + 5q + 1)p^5$

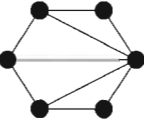
8.7	180
	$t^5 + 3t^4 + 2t^3z + 4t^3 + t^2z^2 + 3t^2z + 4t^2 + tz^2 + 5tz + 2t + z^3 + 3z^2 + 2z$
	32
	$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda^3 - 5\lambda^2 + 9\lambda - 7)$
	$(-1 + \lambda)(\lambda-2)(\lambda-3)$
	$(14q^3 + 12q^2 + 5q + 1)p^5$

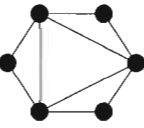
8.8	90
	$t^5 + 3t^4 + 6t^3 + 5t^2z + 5t^2 + 2tz^2 + 6tz + 2t + z^3 + 3z^2 + 2z$
	36
	$\lambda(\lambda-1)(\lambda^4 - 7\lambda^3 + 21\lambda^2 - 30\lambda + 17)$
	$(-1 + \lambda)(\lambda-2)(\lambda-3)$
	$(17q^3 + 13q^2 + 5q + 1)p^5$

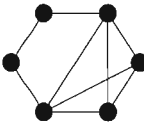
8.9	360
	$t^5 + 3t^4 + t^3z + 5t^3 + 4t^2z + 5t^2 + 2tz^2 + 6tz + 2t + z^3 + 3z^2 + 2z$
	35
	$\lambda(\lambda-1)(\lambda^2 - 3\lambda + 4)(\lambda-2)^2$
	$(-1 + \lambda)(\lambda-2)(\lambda-3)$
	$(16q^3 + 13q^2 + 5q + 1)p^5$

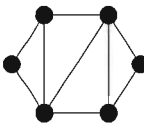
9.1	15
	$t^5 + 4t^4 + 4t^3z + 6t^3 + 6t^2z^2 + 6t^2z + 4t^2 + 4tz^3 + 4tz^2 + 4tz + t + z^4 + z^3 + z^2 + z$
	48
	$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^4$
	$(\lambda-2)(\lambda^2 - 2\lambda + 2)(-1 + \lambda)$
	$(16q^4 + 15q^3 + 11q^2 + 5q + 1)p^5$

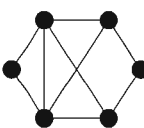
9.2	360
	$t^5 + 4t^4 + 4t^3z + 6t^3 + 4t^2z^2 + 8t^2z + 4t^2 + 3tz^3 + 6tz^2 + 5tz +$ $t + z^4 + 2z^3 + 2z^2 + z$
	52
	$\lambda (\lambda - 1) (\lambda - 2)^4$
	$(-1 + \lambda) (\lambda - 2) (\lambda^2 - 3\lambda + 3)$
	$(16q^4 + 18q^3 + 12q^2 + 5q + 1) p^5$

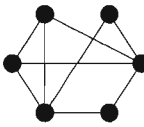
9.3	360
	$t^5 + 4t^4 + 4t^3z + 6t^3 + 3t^2z^2 + 9t^2z + 4t^2 + 2tz^3 + 7tz^2 + 6tz +$ $t + z^4 + 3z^3 + 3z^2 + z$
	55
	$\lambda (\lambda - 1) (\lambda - 2)^4$
	$(\lambda - 2)^3 (-1 + \lambda)$
	$(16q^4 + 20q^3 + 13q^2 + 5q + 1) p^5$

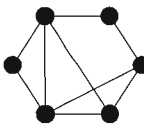
9.4	120
	$t^5 + 4t^4 + 4t^3z + 6t^3 + 3t^2z^2 + 9t^2z + 4t^2 + 3tz^3 + 6tz^2 + 6tz +$ $t + z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z$
	54
	$\lambda (\lambda - 1) (\lambda - 2)^4$
	$(-7 + 10\lambda - 5\lambda^2 + \lambda^3) (-1 + \lambda)$
	$(16q^4 + 20q^3 + 12q^2 + 5q + 1) p^5$

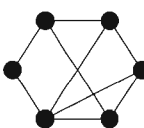
9.5	180
	$t^5 + 4t^4 + 4t^3z + 6t^3 + t^2z^3 + 3t^2z^2 + 7t^2z + 5t^2 + tz^3 + 5tz^2 +$ $7tz + 2t + z^4 + 3z^3 + 4z^2 + 2z$
	56
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda^2 - 3\lambda + 3)$
	$(-1 + \lambda)(\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 5)$
	$(18q^4 + 20q^3 + 12q^2 + 5q + 1)p^5$

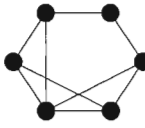
9.6	360
	$t^5 + 4t^4 + 4t^3z + 6t^3 + 3t^2z^2 + 9t^2z + 4t^2 + 2tz^3 + 7tz^2 + 6tz +$ $t + z^4 + 3z^3 + 3z^2 + z$
	55
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)^4$
	$(\lambda - 2)^3(-1 + \lambda)$
	$(16q^4 + 20q^3 + 13q^2 + 5q + 1)p^5$

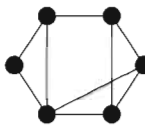
9.7	180
	$t^5 + 4t^4 + 3t^3z + 7t^3 + 3t^2z^2 + 8t^2z + 6t^2 + 2tz^3 + 6tz^2 + 8tz +$ $2t + z^4 + 3z^3 + 4z^2 + 2z$
	60
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 5)(\lambda - 2)^2$
	$(-1 + \lambda)(\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 5)$
	$(20q^4 + 21q^3 + 13q^2 + 5q + 1)p^5$

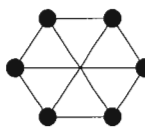
9.8	90
	$t^5 + 4t^4 + 2t^3z + 8t^3 + t^2z^2 + 10t^2z + 7t^2 + 2tz^3 + 8tz^2 + 9tz +$ $2t + z^4 + 3z^3 + 4z^2 + 2z$
	64
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 14\lambda - 11)$
	$(-1 + \lambda)(\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 5)$
	$(22q^4 + 23q^3 + 13q^2 + 5q + 1)p^5$

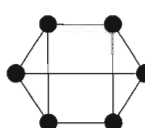
9.9	720
	$t^5 + 4t^4 + 3t^3z + 7t^3 + 2t^2z^2 + 9t^2z + 6t^2 + 2tz^3 + 7tz^2 + 8tz +$ $2t + z^4 + 3z^3 + 4z^2 + 2z$
	61
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 5)(\lambda - 2)^2$
	$(-1 + \lambda)(\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 5)$
	$(20q^4 + 22q^3 + 13q^2 + 5q + 1)p^5$

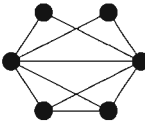
9.10	360
	$t^5 + 4t^4 + 2t^3z + 8t^3 + t^2z^2 + 9t^2z + 8t^2 + tz^3 + 7tz^2 + 11tz +$ $3t + z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 3z$
	69
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 6)(\lambda - 2)^2$
	$(-1 + \lambda)(\lambda - 2)(\lambda^2 - 5\lambda + 7)$
	$(24q^4 + 25q^3 + 14q^2 + 5q + 1)p^5$

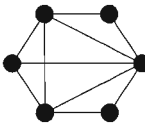
9.11	360
	$t^5 + 4t^4 + 3t^3z + 7t^3 + 2t^2z^2 + 8t^2z + 7t^2 + tz^3 + 6tz^2 + 10tz +$ $3t + z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 3z$
	66
	$\lambda(\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 13\lambda - 11)$
	$(-1 + \lambda)(\lambda - 2)(\lambda^2 - 5\lambda + 7)$
	$(22q^4 + 24q^3 + 14q^2 + 5q + 1)p^5$

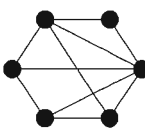
9.12	360
	$t^5 + 4t^4 + 3t^3z + 7t^3 + t^2z^2 + 10t^2z + 6t^2 + tz^3 + 8tz^2 + 9tz +$ $2t + z^4 + 4z^3 + 5z^2 + 2z$
	64
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 5)(\lambda - 2)^2$
	$(-1 + \lambda)(\lambda - 3)(\lambda - 2)^2$
	$(20q^4 + 24q^3 + 14q^2 + 5q + 1)p^5$

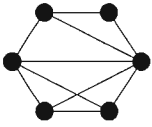
9.13	10
	$t^5 + 4t^4 + 10t^3 + 9t^2z + 11t^2 + 6tz^2 + 15tz + 5t + z^4 + 5z^3 + 9z^2 + 5z$
	81
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda^4 - 8\lambda^3 + 28\lambda^2 - 47\lambda + 31)$
	$(-1 + \lambda)(\lambda - 2)(\lambda^2 - 6\lambda + 10)$
	$(31q^4 + 29q^3 + 15q^2 + 5q + 1)p^5$

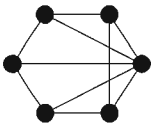
9.14	60
	$t^5 + 4t^4 + 2t^3z + 8t^3 + 9t^2z + 9t^2 + 7tz^2 + 13tz + 4t + z^4 + 5z^3 +$ $8z^2 + 4z$
	75
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 14\lambda - 13)$
	$(-1 + \lambda)(\lambda - 2)(\lambda - 3)^2$
	$(26q^4 + 28q^3 + 15q^2 + 5q + 1)p^5$

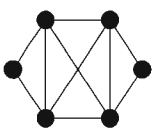
10.1	90
	$t^5 + 5t^4 + 6t^3z + 9t^3 + t^2z^3 + 8t^2z^2 + 13t^2z + 7t^2 + 2tz^4 + 8tz^3 +$ $11tz^2 + 9tz + 2t + z^5 + 3z^4 + 4z^3 + 4z^2 + 2z$
	96
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda - 2)^3$
	$(-1 + \lambda)(\lambda - 2)(\lambda^3 - 5\lambda^2 + 9\lambda - 7)$
	$(24q^5 + 30q^4 + 23q^3 + 13q^2 + 5q + 1)p^5$

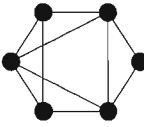
10.2	360
	$t^5 + 5t^4 + 6t^3z + 9t^3 + t^2z^3 + 7t^2z^2 + 14t^2z + 7t^2 + 2tz^4 + 7tz^3 +$ $12tz^2 + 10tz + 2t + z^5 + 3z^4 + 5z^3 + 5z^2 + 2z$
	99
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda - 2)^3$
	$(-1 + \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 4)(\lambda - 2)^2$
	$(24q^5 + 32q^4 + 24q^3 + 13q^2 + 5q + 1)p^5$

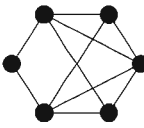
10.3	360
	$t^5 + 5t^4 + 5t^3z + 10t^3 + 6t^2z^2 + 15t^2z + 9t^2 + tz^4 + 7tz^3 + 14tz^2 +$ $13tz + 3t + z^5 + 4z^4 + 7z^3 + 7z^2 + 3z$
	111
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 7)(\lambda - 2)^2$
	$(-1 + \lambda)(\lambda - 2)(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 13\lambda - 11)$
	$(28q^5 + 36q^4 + 27q^3 + 14q^2 + 5q + 1)p^5$

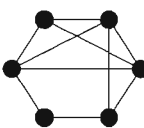
10.4	360
	$t^5 + 5t^4 + 6t^3z + 9t^3 + t^2z^3 + 6t^2z^2 + 15t^2z + 7t^2 + tz^4 + 6tz^3 +$ $14tz^2 + 11tz + 2t + z^5 + 4z^4 + 7z^3 + 6z^2 + 2z$
	104
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda - 2)^3$
	$(-1 + \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 5)(\lambda - 2)^2$
	$(24q^5 + 34q^4 + 26q^3 + 14q^2 + 5q + 1)p^5$

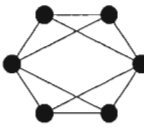
10.5	72
	$t^5 + 5t^4 + 5t^3z + 10t^3 + 5t^2z^2 + 15t^2z + 10t^2 + 5tz^3 + 15tz^2 +$ $16tz + 4t + z^5 + 5z^4 + 10z^3 + 10z^2 + 4z$
	121
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda^2 - 4\lambda + 5)$
	$(-1 + \lambda)(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda^2 - 4\lambda + 5)$
	$(30q^5 + 40q^4 + 30q^3 + 15q^2 + 5q + 1)p^5$

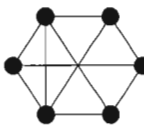
10.6	90
	$t^5 + 5t^4 + 6t^3z + 9t^3 + t^2z^3 + 7t^2z^2 + 14t^2z + 7t^2 + 2tz^4 + 6tz^3 +$ $13tz^2 + 10tz + 2t + z^5 + 3z^4 + 6z^3 + 5z^2 + 2z$
	100
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda - 2)^3$
	$(-1 + \lambda)(\lambda^4 - 7\lambda^3 + 21\lambda^2 - 30\lambda + 17)$
	$(24q^5 + 32q^4 + 25q^3 + 13q^2 + 5q + 1)p^5$

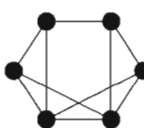
10.7	360
	$t^5 + 5t^4 + 5t^3z + 10t^3 + 5t^2z^2 + 16t^2z + 9t^2 + tz^4 + 6tz^3 + 15tz^2 +$ $14tz + 3t + z^5 + 4z^4 + 8z^3 + 8z^2 + 3z$
	114
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 7)(\lambda - 2)^2$
	$(-1 + \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 6)(\lambda - 2)^2$
	$(28q^5 + 38q^4 + 28q^3 + 14q^2 + 5q + 1)p^5$

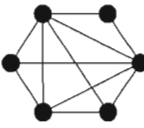
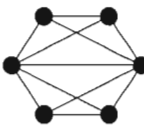

10.8	180
	$t^5 + 5t^4 + 4t^3z + 11t^3 + 4t^2z^2 + 16t^2z + 11t^2 + tz^4 + 6tz^3 + 15tz^2 +$ $16tz + 4t + z^5 + 4z^4 + 8z^3 + 9z^2 + 4z$
	120
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 8)(\lambda - 2)^2$
	$(-1 + \lambda)(\lambda - 2)(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 14\lambda - 13)$
	$(32q^5 + 40q^4 + 28q^3 + 14q^2 + 5q + 1)p^5$

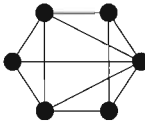
10.9	360
	$t^5 + 5t^4 + 5t^3z + 10t^3 + t^2z^3 + 5t^2z^2 + 14t^2z + 10t^2 + tz^4 + 5tz^3 +$ $13tz^2 + 15tz + 4t + z^5 + 4z^4 + 8z^3 + 9z^2 + 4z$
	115
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda^2 - 4\lambda + 5)$
	$(-1 + \lambda)(\lambda - 2)(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 14\lambda - 13)$
	$(30q^5 + 38q^4 + 27q^3 + 14q^2 + 5q + 1)p^5$

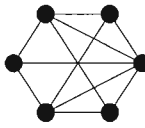
10.10	45
	$t^5 + 5t^4 + 4t^3z + 11t^3 + 2t^2z^2 + 18t^2z + 11t^2 + 4tz^3 + 18tz^2 +$ $18tz + 4t + z^5 + 5z^4 + 11z^3 + 11z^2 + 4z$
	128
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 8)(\lambda - 2)^2$
	$(-1 + \lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 8)(\lambda - 2)^2$
	$(32q^5 + 44q^4 + 31q^3 + 15q^2 + 5q + 1)p^5$

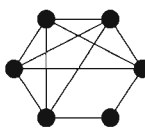
10.11	60
	$t^5 + 5t^4 + 3t^3z + 12t^3 + 3t^2z^2 + 15t^2z + 14t^2 + 4tz^3 + 15tz^2 +$ $21tz + 6t + z^5 + 5z^4 + 11z^3 + 13z^2 + 6z$
	135
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda^3 - 7\lambda^2 + 19\lambda - 19)$
	$(-1 + \lambda)(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda^2 - 4\lambda + 6)$
	$(38q^5 + 45q^4 + 31q^3 + 15q^2 + 5q + 1)p^5$

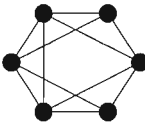
10.12	360
	$t^5 + 5t^4 + 4t^3z + 11t^3 + 3t^2z^2 + 16t^2z + 12t^2 + 4tz^3 + 16tz^2 +$ $19tz + 5t + z^5 + 5z^4 + 11z^3 + 12z^2 + 5z$
	130
	$\lambda(\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda^3 - 7\lambda^2 + 18\lambda - 17)$
	$(-1 + \lambda)(\lambda - 2)(\lambda^3 - 7\lambda^2 + 18\lambda - 17)$
	$(34q^5 + 44q^4 + 31q^3 + 15q^2 + 5q + 1)p^5$

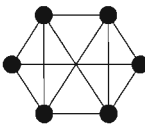
11.1	180
	$t^5 + 6t^4 + 8t^3z + 13t^3 + 2t^2z^3 + 12t^2z^2 + 22t^2z + 12t^2 + tz^5 + 6tz^4 +$ $15tz^3 + 22tz^2 + 18tz + 4t + z^6 + 4z^5 + 8z^4 + 11z^3 + 10z^2 + 4z$ 180
	$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-3)^2$
	$(-1+\lambda)(\lambda-2)(\lambda^4 - 7\lambda^3 + 20\lambda^2 - 29\lambda + 19)$
	$(36q^6 + 52q^5 + 44q^4 + 28q^3 + 14q^2 + 5q + 1)p^5$
11.2	45
	$t^5 + 6t^4 + 8t^3z + 13t^3 + 2t^2z^3 + 10t^2z^2 + 24t^2z + 12t^2 + 4tz^4 +$ $14tz^3 + 26tz^2 + 20tz + 4t + z^6 + 5z^5 + 11z^4 + 15z^3 + 12z^2 + 4z$ 192
	$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-3)^2$
	$(-1+\lambda)(\lambda-3)(\lambda^2 - 3\lambda + 4)(\lambda-2)^2$
	$(36q^6 + 56q^5 + 48q^4 + 31q^3 + 15q^2 + 5q + 1)p^5$
11.3	360
	$t^5 + 6t^4 + 8t^3z + 13t^3 + 2t^2z^3 + 11t^2z^2 + 23t^2z + 12t^2 + tz^5 + 5tz^4 +$ $14tz^3 + 24tz^2 + 19tz + 4t + z^6 + 4z^5 + 9z^4 + 13z^3 + 11z^2 + 4z$ 185
	$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-3)^2$
	$(-1+\lambda)(\lambda-2)(\lambda^4 - 7\lambda^3 + 21\lambda^2 - 32\lambda + 21)$
	$(36q^6 + 54q^5 + 46q^4 + 29q^3 + 14q^2 + 5q + 1)p^5$

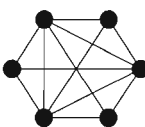
11.4	360
	$t^5 + 6t^4 + 7t^3z + 14t^3 + t^2z^3 + 9t^2z^2 + 24t^2z + 15t^2 + 3tz^4 +$ $13tz^3 + 27tz^2 + 25tz + 6t + z^6 + 5z^5 + 12z^4 + 18z^3 + 16z^2 + 6z$
	209
	$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda^2-5\lambda+7)$
	$(-1+\lambda)(\lambda-2)(\lambda^4-8\lambda^3+26\lambda^2-42\lambda+29)$
	$(42q^6+62q^5+52q^4+32q^3+15q^2+5q+1)p^5$

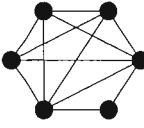
11.5	60
	$t^5 + 6t^4 + 6t^3z + 15t^3 + 9t^2z^2 + 24t^2z + 17t^2 + 3tz^4 + 14tz^3 +$ $27tz^2 + 27tz + 7t + z^6 + 5z^5 + 12z^4 + 18z^3 + 17z^2 + 7z$
	216
	$\lambda(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda^3-8\lambda^2+23\lambda-23)$
	$(-1+\lambda)(\lambda-2)(\lambda^4-8\lambda^3+26\lambda^2-42\lambda+30)$
	$(46q^6+64q^5+53q^4+32q^3+15q^2+5q+1)p^5$

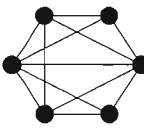
11.6	60
	$t^5 + 6t^4 + 7t^3z + 14t^3 + 2t^2z^3 + 9t^2z^2 + 23t^2z + 15t^2 + tz^5 + 4tz^4 +$ $13tz^3 + 24tz^2 + 24tz + 6t + z^6 + 4z^5 + 10z^4 + 15z^3 + 15z^2 + 6z$
	200
	$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda^2-5\lambda+7)$
	$(-1+\lambda)(\lambda^5-9\lambda^4+36\lambda^3-79\lambda^2+96\lambda-51)$
	$(42q^6+60q^5+48q^4+30q^3+14q^2+5q+1)p^5$

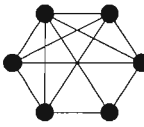
11.7	180
	$t^5 + 6t^4 + 6t^3z + 15t^3 + 7t^2z^2 + 26t^2z + 17t^2 + 2tz^4 + 12tz^3 +$ $30tz^2 + 29tz + 7t + z^6 + 5z^5 + 13z^4 + 21z^3 + 19z^2 + 7z$
	224
	$\lambda(\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda^3 - 8\lambda^2 + 23\lambda - 23)$
	$(-1 + \lambda)(\lambda - 2)(\lambda^4 - 8\lambda^3 + 27\lambda^2 - 46\lambda + 33)$
	$(46q^6 + 68q^5 + 56q^4 + 33q^3 + 15q^2 + 5q + 1)p^5$

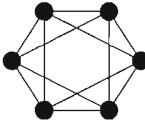
11.8	90
	$t^5 + 6t^4 + 6t^3z + 15t^3 + t^2z^3 + 7t^2z^2 + 24t^2z + 18t^2 + 2tz^4 +$ $11tz^3 + 28tz^2 + 30tz + 8t + z^6 + 5z^5 + 13z^4 + 21z^3 + 20z^2 + 8z$
	225
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda^2 - 5\lambda + 8)$
	$(-1 + \lambda)(\lambda - 2)(\lambda^4 - 8\lambda^3 + 27\lambda^2 - 46\lambda + 34)$
	$(48q^6 + 68q^5 + 55q^4 + 33q^3 + 15q^2 + 5q + 1)p^5$

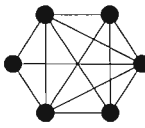
12.1	20
	$t^5 + 7t^4 + 10t^3z + 18t^3 + 3t^2z^3 + 18t^2z^2 + 33t^2z + 20t^2 + 3tz^5 +$ $12tz^4 + 27tz^3 + 39tz^2 + 33tz + 8t + z^7 + 5z^6 + 12z^5 + 20z^4 +$ $25z^3 + 21z^2 + 8z$
	324
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)^3$
	$(-1 + \lambda)(\lambda - 2)(\lambda^5 - 9\lambda^4 + 34\lambda^3 - 70\lambda^2 + 82\lambda - 46)$
	$(54q^7 + 84q^6 + 78q^5 + 55q^4 + 32q^3 + 15q^2 + 5q + 1)p^5$

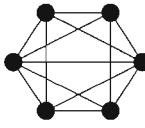
12.2	60
	$t^5 + 7t^4 + 11t^3z + 17t^3 + 5t^2z^3 + 18t^2z^2 + 33t^2z + 17t^2 + tz^6 +$ $4tz^5 + 13tz^4 + 26tz^3 + 37tz^2 + 28tz + 6t + z^7 + 4z^6 + 10z^5 +$ $17z^4 + 21z^3 + 17z^2 + 6z$
	300
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda - 4)(\lambda - 2)^2$
	$(-1 + \lambda)(\lambda^4 - 6\lambda^3 + 17\lambda^2 - 25\lambda + 19)(\lambda - 2)^2$
	$(48q^7 + 78q^6 + 72q^5 + 52q^4 + 30q^3 + 14q^2 + 5q + 1)p^5$

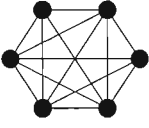
12.3	180
	$t^5 + 7t^4 + 10t^3z + 18t^3 + 3t^2z^3 + 16t^2z^2 + 35t^2z + 20t^2 + 2tz^5 +$ $10tz^4 + 26tz^3 + 43tz^2 + 35tz + 8t + z^7 + 5z^6 + 13z^5 + 23z^4 +$ $29z^3 + 23z^2 + 8z$
	336
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)^3$
	$(-1 + \lambda)(\lambda - 2)(\lambda^5 - 9\lambda^4 + 35\lambda^3 - 75\lambda^2 + 91\lambda - 51)$
	$(54q^7 + 88q^6 + 82q^5 + 58q^4 + 33q^3 + 15q^2 + 5q + 1)p^5$

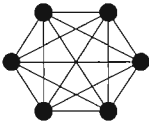
12.4	180
	$t^5 + 7t^4 + 9t^3z + 19t^3 + 2t^2z^3 + 14t^2z^2 + 36t^2z + 23t^2 + tz^5 +$ $8tz^4 + 25tz^3 + 46tz^2 + 41tz + 10t + z^7 + 5z^6 + 14z^5 + 26z^4 +$ $34z^3 + 28z^2 + 10z$
	360
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda^2 - 6\lambda + 10)$
	$(-1 + \lambda)(\lambda - 2)(\lambda^5 - 9\lambda^4 + 36\lambda^3 - 80\lambda^2 + 101\lambda - 59)$
	$(60q^7 + 96q^6 + 88q^5 + 61q^4 + 34q^3 + 15q^2 + 5q + 1)p^5$

12.5	15
	$t^5 + 7t^4 + 8t^3z + 20t^3 + 12t^2z^2 + 39t^2z + 25t^2 + 6tz^4 + 24tz^3 +$ $52tz^2 + 46tz + 11t + z^7 + 5z^6 + 15z^5 + 29z^4 + 40z^3 + 32z^2 + 11z$
	384
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda^3 - 9\lambda^2 + 29\lambda - 32)$
	$(-1 + \lambda)(\lambda^6 - 11\lambda^5 + 55\lambda^4 - 159\lambda^3 + 282\lambda^2 - 290\lambda + 133)$
	$(64q^7 + 104q^6 + 96q^5 + 64q^4 + 35q^3 + 15q^2 + 5q + 1)p^5$

13.1	60
	$t^5 + 8t^4 + 13t^3z + 23t^3 + 6t^2z^3 + 24t^2z^2 + 49t^2z + 28t^2 + tz^6 +$ $6tz^5 + 21tz^4 + 44tz^3 + 66tz^2 + 52tz + 12t + z^8 + 5z^7 + 14z^6 +$ $28z^5 + 42z^4 + 48z^3 + 36z^2 + 12z$
	540
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 4)(\lambda - 3)^2$
	$(-1 + \lambda)(\lambda - 2)(\lambda^6 - 10\lambda^5 + 45\lambda^4 - 118\lambda^3 + 193\lambda^2 - 192\lambda + 93)$
	$(72q^8 + 126q^7 + 126q^6 + 98q^5 + 63q^4 + 34q^3 + 15q^2 + 5q + 1)p^5$

13.2	45
	$t^5 + 8t^4 + 12t^3z + 24t^3 + 4t^2z^3 + 22t^2z^2 + 51t^2z + 31t^2 + 4tz^5 +$ $18tz^4 + 44tz^3 + 72tz^2 + 59tz + 14t + z^8 + 5z^7 + 15z^6 + 31z^5 +$ $48z^4 + 56z^3 + 42z^2 + 14z$
	576
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda^2 - 7\lambda + 13)$
	$(-1 + \lambda)(\lambda - 2)(\lambda^6 - 10\lambda^5 + 46\lambda^4 - 124\lambda^3 + 209\lambda^2 - 214\lambda + 106)$
	$(78q^8 + 136q^7 + 136q^6 + 104q^5 + 66q^4 + 35q^3 + 15q^2 + 5q + 1)p^5$

14.1	15
	$t^5 + 9t^4 + 16t^3z + 29t^3 + 9t^2z^3 + 33t^2z^2 + 68t^2z + 39t^2 + 2tz^6 +$ $12tz^5 + 36tz^4 + 70tz^3 + 102tz^2 + 78tz + 18t + z^9 + 5z^8 + 15z^7 +$ $33z^6 + 56z^5 + 76z^4 + 81z^3 + 57z^2 + 18z$
	864
	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 4)^2$
	$(-1 + \lambda)(\lambda - 2)(\lambda^7 - 11\lambda^6 + 56\lambda^5 - 172\lambda^4 + 347\lambda^3 - 467\lambda^2 +$ $399\lambda - 171)$
	$(96q^9 + 180q^8 + 192q^7 + 160q^6 + 112q^5 + 68q^4 + 35q^3 + 15q^2 +$ $5q + 1)p^5$

15.1	1
	$t^5 + 10t^4 + 20t^3z + 35t^3 + 15t^2z^3 + 45t^2z^2 + 90t^2z + 50t^2 + 6tz^6 +$ $24tz^5 + 60tz^4 + 105tz^3 + 145tz^2 + 106tz + 24t + z^{10} + 5z^9 + 15z^8 +$ $35z^7 + 64z^6 + 96z^5 + 120z^4 + 120z^3 + 80z^2 + 24z$
	1296
	$\lambda(\lambda - 5)(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 4)$
	$(-1 + \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 5)(\lambda^5 - 6\lambda^4 + 18\lambda^3 - 34\lambda^2 + 37\lambda - 28)$ $(\lambda - 2)^2$
	$(120q^{10} + 240q^9 + 270q^8 + 240q^7 + 180q^6 + 120q^5 + 70q^4 +$ $35q^3 + 15q^2 + 5q + 1)p^5$

APPENDICE B

TABLEAUX DES COEFFICIENTS $|\mathcal{B}_a[n]|_w$, $2 \leq n \leq 6$

Nombre de sommets	Coefficient $ \mathcal{B}_a[n] _\varepsilon$
2	1
3	1
4	10
5	238
6	11368

Tableau B.1 Les coefficients $|\mathcal{B}_a[n]|_\varepsilon$ sont le nombre total de graphes 2-connexes étiquetés sur n sommets, $2 \leq n \leq 6$

Nombre de sommets	Coefficient $ \mathcal{B}_a[n] _{ac}$
2	1
3	3
4	76
5	5770
6	1100328

Tableau B.2 Les coefficients $|\mathcal{B}_a[n]|_{ac}$ sont le nombre total d'arbres couvrants sur les graphes 2-connexes étiquetés sur n sommets, $2 \leq n \leq 6$

Nombre de sommets	Coefficient $ \mathcal{B}_a[n] _{\chi}$
2	t
3	$t^2 + t + z$
4	$z^3 + 10t^3 + 9z^2 + 16zt + 18t^2 + 11z + 11t$
5	$z^6 + 14z^5 + 95z^4 + 55z^3t + 238t^4 + 345z^3 + 495z^2t + 620zt^2 + 688t^3 + 605z^2 + 1065zt + 823t^2 + 363z + 363t$
6	$z^{10} + 20z^9 + 195z^8 + 156tz^6 + 1240z^7 + 2184tz^5 + 5624z^6 + 11368t^5 + 5130t^2z^3 + 14820tz^4 + 18708z^5 + 48640t^4 + 45040t^3z + 46170t^2z^2 + 57135tz^3 + 45260z^4 + 92940t^3 + 136950t^2z + 130615tz^2 + 76435z^3 + 87470t^2 + 132613tz + 77300z^2 + 32157t + 32157z$

Tableau B.3 Les coefficients $|\mathcal{B}_a[n]|_{\chi}$ sont la somme des polynômes de Tutte de tous les graphes 2–connexes étiquetés sur n sommets, $2 \leq n \leq 6$

Nombre de sommets	Coefficient $ \mathcal{B}_a[n] _{N^*}$
2	0
3	$(-1 + \lambda)$
4	$(-1 + \lambda)(\lambda^2 + \lambda - 3)$
5	$(-1 + \lambda)(\lambda^5 + \lambda^4 + \lambda^3 - 4\lambda^2 - 19\lambda + 21)$
6	$(-1 + \lambda)(\lambda^9 + \lambda^8 + \lambda^7 + \lambda^6 - 5\lambda^5 - 5\lambda^4 - 65\lambda^3 + 10\lambda^2 + 240\lambda - 180)$

Tableau B.4 Les coefficients $|\mathcal{B}_a[n]|_{N^*}$ sont le nombre total de λ –flots à flux non nuls sur tous les graphes 2–connexes étiquetés sur n sommets, $2 \leq n \leq 6$

Nombre de sommets	Coefficient $ \mathcal{B}_a[n] _{\mathbb{R}}$
2	p
3	$-(2p - 3)p^2$
4	$-2(3p^3 - 24p^2 + 54p - 38)p^3$
5	$2(12p^6 - 180p^5 + 1140p^4 - 3860p^3 + 7250p^2 - 7128p$ $+ 2885)p^4$
6	$8(15p^{10} - 360p^9 + 3915p^8 - 25440p^7 + 109470p^6$ $- 326010p^5 + 680240p^4 - 981045p^3 + 935055p^2$ $- 531960p + 137541)p^5$

Tableau B.5 Les coefficients $|\mathcal{B}_a[n]|_{\mathbb{R}}$ sont la somme des polynômes de fiabilité de tous les graphes 2-connexes étiquetés sur n sommets, $2 \leq n \leq 6$

APPENDICE C

TABLEAUX DES COEFFICIENTS $|C_{\mathcal{B}}[n]|_w$, $1 \leq n \leq 6$

Nombre de sommets	Coefficient $ C_{\mathcal{B}}[n] _{\varepsilon}$
1	1
2	1
3	4
4	38
5	728
6	26704

Tableau C.1 Les coefficients $|C_{\mathcal{B}}[n]|_{\varepsilon}$ sont le nombre total de graphes connexes étiquetés sur n sommets, $1 \leq n \leq 6$

Nombre de sommets	Coefficient $ C_B[n] _{ac}$
1	1
2	1
3	6
4	128
5	8000
6	1327104

Tableau C.2 Les coefficients $|C_B[n]|_{ac}$ sont le nombre total d'arbres couvrants sur les graphes connexes étiquetés sur n sommets, $1 \leq n \leq 6$

Nombre de sommets	Coefficient $ C_B[n] _x$
1	1
2	t
3	$4t^2 + t + z$
4	$38t^3 + z^3 + 30t^2 + 28tz + 9z^2 + 11t + 11z$
5	$490t^4 + 20tz^3 + 550t^3 + 500t^2z + 180tz^2 + z^3 + 253t^2 + 266tz + 24z^2 + 11t + 11z$
6	$z^{10} + 20z^9 + 195z^8 + 156tz^6 + 1240z^7 + 2184tz^5 + 5624z^6 + 19564t^5 + 5550t^2z^3 + 14820tz^4 + 18708z^5 + 60340t^4 + 55600t^3z + 49950t^2z^2 + 57225tz^3 + 45320z^4 + 99720t^3 + 145170t^2z + 132925tz^2 + 76975z^3 + 88460t^2 + 134263tz + 77960z^2 + 32157t + 32157z$

Tableau C.3 Les coefficients $|C_B[n]|_x$ sont la somme des polynômes de Tutte de tous les graphes connexes étiquetés sur n sommets, $1 \leq n \leq 6$

Nombre de sommets	Coefficient $ C_{\mathcal{B}}[n] _{N^*}$
1	1
2	0
3	$\lambda - 1$
4	$(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 3)$
5	$(\lambda - 1)(\lambda^5 + \lambda^4 + \lambda^3 - 4\lambda^2 - 4\lambda + 6)$
6	$(\lambda - 1)\lambda^2(\lambda^7 + \lambda^6 + \lambda^5 + \lambda^4 - 5\lambda^3 - 5\lambda^2 - 5\lambda + 10)$

Tableau C.4 Les coefficients $|C_{\mathcal{B}}[n]|_{N^*}$ sont le nombre total de λ -flots à flux non nuls sur tous les graphes connexes étiquetés sur n sommets, $1 \leq n \leq 6$

Nombre de sommets	Coefficient $ C_{\mathcal{B}}[n] _{\mathbb{R}}$
1	1
2	p
3	$-2(p - 3)p^2$
4	$-2(3p^3 - 24p^2 + 66p - 64)p^3$
5	$8(3p^6 - 45p^5 + 285p^4 - 980p^3 + 1940p^2 - 2112p + 1000)p^4$
6	$8(15p^{10} - 360p^9 + 3915p^8 - 25440p^7 + 109560p^6 - 327360p^5 + 688880p^4 - 1011120p^3 + 994560p^2 - 595200p + 165888)p^5$

Tableau C.5 Les coefficients $|C_{\mathcal{B}}[n]|_{\mathbb{R}}$ sont la somme des polynômes de fiabilité de tous les graphes connexes étiquetés sur n sommets, $1 \leq n \leq 6$

BIBLIOGRAPHIE

- (1) Berge, C. et M. Gouila-Houri. 1962. *Programmes, jeux et réseaux de transport*. Paris: Dunod.
- (2) Bergeron, François, Gilbert Labelle et Pierre Leroux. 1994. *Théories des espèces et combinatoire des structures arborescentes*. Coll. «Publications du LaCIM», vol. 19. Montréal: LaCIM, 394 p.
- (3) Bergeron, François, Gilbert Labelle et Pierre Leroux. 1997. *Combinatorial Species and Tree-like Structures*. Coll. «Encyclopedia of Mathematics and its Applications», vol. 67. Cambridge: Cambridge University Press, 479 p.
- (4) Bollobas, B. et O. Riordan. 1999. A Tutte polynomial for colored graphs. *Combinatorics, Probability and Computing*, vol. 8, p. 45-94.
- (5) Brylawski, Thomas, et James Oxley. 1992. «The Tutte polynomial and its applications». In *Matroid Applications*, sous la dir. de Neil White, p. 123-225. Coll. «Encyclopedia of Mathematics and its Applications», vol. 40. Cambridge: Cambridge University Press.
- (6) Burde, Gerhard, et Heiner Zieschang. 1985. *Knots*. Berlin: de Gruyter, 400 p.
- (7) Chang, Shu-Chiuan, et Robert Shrock. 2003. «Tutte Polynomials and Related Asymptotic Limiting Functions for Recursive Families of Graphs». *Advances in Applied Mathematics*, vol. 32, p. 44-87.
- (8) Ducharme, Martin. 2004. «Intégrales de Mayer et graphes 2-connexes pondérés». Mémoire de maîtrise, Montréal, Université du Québec à Montréal, 71 p.
- (9) Harary, F. et E. M. Palmer. 1973. *Graphical Enumeration*. New York et Londres: Academic Press, 271 p.
- (10) Husimi, Kōji. 1950. «Note on Mayer's theory of Cluster Integrals». *The Journal of Chemical Physics*, 18, p. 682-684.
- (11) Joyal, André. 1981. «Une théorie combinatoire des séries formelles». *Advances in Mathematics*, vol. 42, p. 1-82.
- (12) Kauffman, Louis H. 1988. «New invariants in the theory of knots». *The American Mathematical Monthly*, vol. 95, no. 3, p. 195-242.

- (13) Kauffman, Louis H. 1989. «A Tutte polynomial for signed graphs». *Discrete Applied Mathematics*, vol. 25, p. 105-127.
- (14) Labelle, Jacques. 1981. *Théorie des graphes*. Mont-Royal (Qc): Modulo Éditeur, 183 p.
- (15) Labelle, Jacques. 1983. «Applications diverses de la théorie combinatoire des espèces de structures». *Annales des sciences mathématiques du Québec*, 7, p. 59-94.
- (16) Leroux, Pierre. 1988. «Methoden der Anzahlbestimmung für einige Klassen von Graphen». *Bayreuther Mathematische Schriften*, 26, p. 1-36.
- (17) Leroux, P. et B. Miloudi. 1992. «Généralisation de la formule d'Otter». *Annales des Sciences Mathématiques du Québec*, 16, p. 53-80.
- (18) Leroux, Pierre. 2004. «Enumerative problems inspired by Mayer's theory of cluster integrals». *The electronic journal of combinatorics*, vol. 11, no. R32, 28 p.
- (19) Lickorish, W.B. Raymond. 1997. *An Introduction to Knot Theory*. Coll. "Graduate Texts in Mathematics". New York: Springer-Verlag, 201 p.
- (20) Norman, R. Z. 1954. «On the Number of Linear Graphs with Given Blocks». Dissertation, University of Michigan.
- (21) Picard, Julie. 2004. «Le polynôme de Jones et quelques conjectures associées». Mémoire de maîtrise, Montréal, Université du Québec à Montréal, 97 p.
- (22) Riddell, R. J. 1951. «Contribution on the Theory of Condensation». Dissertation, University of Michigan.
- (23) Robinson, R. W. 1970. «Enumeration of Non-Separable Graphs». *Journal of Combinatorial Theory*, 9, p. 327-356.
- (24) Sloane, N. J. A. 2005. *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, publié électroniquement à <http://www.research.att.com/~njas/sequences/>.
- (25) Tutte, W.T. 1984. *Graph Theory*. Coll. «Encyclopedia of Mathematics and Its Applications», vol. 21. Californie: Addison-Wesley Publishing Company Inc., 333 p.
- (26) Uhlenbeck, G. E. et G. W. Ford. 1963. *Lectures in Statistical Mechanics*. Providence (Rhode Island): American Mathematical Society, 181 p.
- (27) Welsh, D.J.A. 1993. *Complexity: Knots, Colourings and Counting*. Cambridge (Gr.Bret.): Cambridge University Press, 163 p.
- (28) West, D.B. 2001. *Introduction to graph theory*, 2^e éd. New Jersey: Prentice-Hall Inc.